

열 및 통계 물리 1 (수시고사 1)

출제교수명: 정형채

시험 일자: 2011. 9. 22. 목요일 13:30 - 14:45

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

1. [40점] N 개의 Ising 스핀이 1차원 격자 구조로 배열되어 있는 계의 Hamiltonian이

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - B \sum_{i=1}^N S_i$$

로 주어진다. 여기서 $S_i \in \{1, -1\}$ 이고, 주기 조건이 적용되어 $S_{N+1} = S_1$ 이라 놓는다.

- (a) $N = 3$ 이고 $B = 2J = E_0$ 일 때, 가능한 에너지 준위를 모두 나열하고, 각각의 에너지 준위에 대한 상태수를 구하라.
- (b) $J = 0$ 인 경우, 일반적인 N 에 대하여, 가능한 에너지 준위와 각각의 에너지 준위에 대한 상태수를 구하라.
- (c) $J = 0$ 인 경우, 계의 에너지가 $[U, U + \delta U]$ 구간에 있는 상태수 $\Omega(U; \delta U)$ 를 근사적으로

$$\Omega(U; \delta U) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2B}\right)! \left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2B}\right)!} \left(\frac{\delta U}{2B}\right)$$

로 적을 수 있음을 보여라.

- (d) 입자수 N 이 큰 경우, $\ln N! \approx N \ln N - N$ 임을 이용하여, $B < \delta U \ll U$ 일 때, $\ln \Omega(U; \delta U)$ 가 근사적으로

$$N \ln N - \frac{N}{2} \ln \left(\frac{N^2 - (U/B)^2}{4} \right) + \frac{U}{2B} \ln \left(\frac{N - (U/B)}{N + (U/B)} \right)$$

로 주어져 δU 에 무관하게 됨을 보여라.

2. [30점] 1차원 운동을 하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$H = \frac{p^2}{2m} + k|x|$$

로 주어진다.

- (a) 이 입자 에너지가 U 보다 작을 때의 상태를 위상 공간에 그래프로 나타내어라
- (b) 이 입자 에너지가 U 보다 작은 상태수 $\Sigma(U)$ 를 구하여라.
- (c) 이 입자 에너지가 U 에서 $U + \delta U$ 사이에 있는 상태수 $\Omega(U; \delta U)$ 를 구하라.

3. [30점]

- (a) [20점] 반지름 R 인 N 차원 구의 부피 $V_N(R)$ 이

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{\left(\frac{N}{2}\right)!} R^N \quad (1)$$

가 됨을 보여라. 필요시, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 임을 이용하라.

- (b) [10점] 식(1)의 $\left(\frac{N}{2}\right)!$ 를 적분 형태로 나타내고 $\left(\frac{1}{2}\right)!$ 를 계산하라.