열 및 통계 물리 2 (수시고사 1)

출제교수명: 정형채 | 시험 일자: 2011. 3. 30. 수요일 15:00 - 15:50

자연과학 대학 학과 학년 학번: 성명:

1. [20점] 길이 L인 일차원 상자속에 질량 m인 자유 입자가 세 개가 들어있어 계의 Hamiltonian은 $x_i \in [0, L]$인 경우

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}$$

이고 $x_i \notin [0, L]$인 경우 ∞이다. 계의 에너지 범위가 주어졌을 때, 계의 미시 상태 수를 양자역학적 방법과 고전적 방법으로 각각 구하려고 한다. 입자는 서로 구별할 수 있다고 가정하라.

(a) 고전 역학적으로, 에너지가 U보다 작은 계의 상태 수 $\Sigma(U)$를 구하여라. 또, 이를 이용하여 에너지가 $[U, U + \delta U]$에 있는 상태수 $\Omega(U; \delta U)$를 구하면

$$\Omega(U; \delta U) = A m^B L^C U^D \delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수 A, B, C, D를 구하라.

(b) 양자 역학적으로 계의 에너지 띠는

$$\epsilon(n_1, n_2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \right) = \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \right) \epsilon_0$$

로 주어진다. 여기서 ϵ_0는 $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ 이고 n_i는 자연수이다. 에너지가 U보다 작은 계의 상태 수 $\Sigma_Q(U)$는 $\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \right) < U/\epsilon_0$ 를 만족하는 자연수 순서쌍 (n_1, n_2, n_3)의 갯수임을 이용하여 U가 ϵ_0보다 매우 클 때, $\Sigma_Q(U)$를 근사적으로 구하여라.

2. [20점] 한 입자가 가질 수 있는 에너지 상태가 0, ϵ, 2ϵ 세 개인 계가 있다. 여기서 $\epsilon > 0$이다.

(a) 입자 한 개가 온도 $T = \frac{1}{\beta}$인 환경과 평형상태에 있을 때, 한 개 입자의 분배함수 Z_1은

$$Z_1 = 1 + e^A + e^B$$

의 형태로 쓸 수 있음을 보이고 A와 B를 β와 ϵ의 함수로 구하라.

(b) N개 입자로 이루어진 닫힌 계의 해밀토니안은 각각의 입자가 가지는 에너지의 합으로 주어진다. 입자간 구분이 불가능할 때, $Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N$임을 이용하여 분배함수 $Z_N(N, \beta, \epsilon)$를 구하라.

(c) 온도 $T = \frac{1}{\beta}$, 화학 퍼텐셜 μ인 환경과 열린 상태로 평형을 이루고 있다. 대분배함수 Z_G를 구하라.

(d) (c)의 열린계의 평균 입자수 $\langle N \rangle$를 구하라.

3. [20점] 어떤 계가 순수 상태에 있어, 상태함수 벡터 $|\Psi\rangle$로 기술될 때, 이 계의 동력학은 $\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \frac{H}{i\hbar} |\psi(t)\rangle$ 를 만족한다. 여기서 H는 해밀토니안 연산자이다. 이 계를 밀도 연산자 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$로 나타낼 때,

(a) 밀도 연사자가 동력학

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H \ \rho]$$

를 만족함을 보여라.

(b) 밀도 연산자가 ρ가 연산자 H만의 함수일 때, 밀도 연산자가 시간에 무관하게 일정함을 보여라.

4. [20점] 스핀 1/2인 입자 하나가

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\uparrow_z\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\downarrow_z\rangle$$

인 상태에 있다.

(a) 이 상태를 z-방향의 스핀 고유상태를 기저(basis)로 하여 열벡터로 표현하여라.

(b) 이 상태를 x-방향의 스핀 고유상태를 기저(basis)로 하여 열벡터로 표현하여라. 참고로, $\langle \uparrow_x | \uparrow_z \rangle = \langle \downarrow_x | \uparrow_z \rangle = \langle \uparrow_x | \downarrow_z \rangle = 1/\sqrt{2}$ 이고 $\langle \downarrow_x | \downarrow_z \rangle = -1/\sqrt{2}$이다.

(c) 이 상태의 밀도 연산자를 z-방향의 스핀 고유상태를 기저(basis)로 하여 행렬로 표현하여라.

5. [20점] 스핀 $\frac{1}{2}$인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} |\downarrow\downarrow\rangle$$

로 기술되는 pure 상태에 있다. 여기서 $|\updownarrow\updownarrow\rangle$는 $|\updownarrow_z\rangle_A |\updownarrow_z\rangle_B$를 나타낸다.

(a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 행렬 ρ_{AB}을 $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$를 기저로하여 나타내어라.

(b) B계의 밀도 행렬 $\rho_B = \mathrm{Tr}_A(\rho_{AB})$를 구하라.

(c) 이 계의 스핀 B의 x-성분을 측정할 때의 기대값을 구하라.

(참고: s_x^B의 $\{|\uparrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_B\}$, 기저 표현은 $\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.)