열 및 통계 물리 1 (수시고사 1)

출제교수명: 정형채 시험 일자: 2010. 9. 27. 월요일 15:00 - 15:50

자연과학 대학 학과 학년 학번: 성명:

1. [20점] 미시 상태 x에 있을 때 에너지가 $H(x)$로 주어지는 고립계가 있다.

(a) 이 계가 에너지 U를 가지고 평형 상태에 있을 때, 미시 상태 x에 있을 확률이 $p(x)$를 적어라.

(b) 미시 상태 x에 있을 확률이 $p(x) = p_x$일 때, 계의 엔트로피가

$$S = -\sum_x p_x \ln p_x$$

로 주어진다. (a)에서 구한 $p(x)$를 이용하여 이 계의 엔트로피가

$$S(U) = \ln \Omega(U)$$

로 주어짐을 보이고, $\Omega(U)$가 무엇인지 적어라.

2. [40점] 세 개의 스핀 (s_1, s_2, s_3)로 이루어진 계의 해밀토니안이

$$H = -J \sum_i \delta_{s_i s_{i+1}}$$

로 주어진다. 여기서 $s_i \in \{1, 2, 3\}$이고 $\delta_{s_i s_{i+1}}$는 s_i 와 s_{i+1}이 같을 때는 1, 다를 때에는 0의 값을 갖는다. 문제를 간단히 하기 위해 $s_1 = 1$로 고정되어 있다고 하자. 주기 경계 조건을 이용하여 $s_4 = s_1$으로 놓고 아래 물음에 답하라.

(a) [10점] 이 계가 갖을 수 있는 9개의 상태를 나열하고 각각의 경우, 에너지 U를 적어라.

(b) [10점] 이 계가 갖을 수 있는 에너지 U를 모두 적고, 각각의 에너지에 대하여 미시적 상태수 $\Omega(U)$를 구하라.

(c) [5점] 이 계의 에너지가 $U = -J$일 때, $s_2 = 1$ 일 확률 $P_2(1)$을 구하라.

(d) [5점] 이 계의 에너지가 $U = -3J$일 때, $s_2 = 1$ 일 확률 $P_2(1)$을 구하라.

(e) [5점] s_1이 1로 고정되지 않아, $s_1 \in \{1, 2, 3\}$로 된다면, (b)번에서 구한 $\Omega(U)$는 어떻게 변하는지 구하라.

(f) [5점] s_1이 1로 고정되지 않아, $s_1 \in \{1, 2, 3\}$로 된다면, (d)번에서 구한 $P_2(1)$은 어떻게 변하는지 구하라.

3. [30점] 면적 $A = L \times L$인 2차원 상자 속에 N개의 입자로 이루어진 이상기체가 고립된 상태에 있다. 이 계의 해밀토니안은

$$H(\{q_i, p_i\}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} & \text{for} \quad \forall \vec{r}_i \in A \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

(a) 이 계의 에너지가 U보다 작은 상태 수 $\Sigma(U)$가

$$\Sigma(U) = \frac{1}{N! h^f} \int_{H(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}) < U} d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N \, d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_N$$

임을 이용하여

$$\Sigma(U) = g(N) A^{C_1 N} U^{C_2 N} \tag{1}$$

의 형태로 주어짐을 보이고 f, C_1, C_2와 함수 $g(N)$을 구하라. 필요한 경우, 반지름 R인 f차원의 구의 부피 $V_{sp}(f; R)$이

$$V_{sp}(f; R) = \frac{\pi^{f/2}}{\frac{f}{2}!} R^f$$

로 주어짐을 이용하라.

(b) 식 (**??**)를 이용하여 이 계의 에너지가 $[U, U + \delta U]$인 상태 수 $\Omega = \Omega(N, A, U; \delta U)$를 구하라.

(c) 이 계의 엔트로피가

$$S = N \left[\ln \left(\frac{A/N}{\lambda^2} \right) + C_3 \right]$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C_3와 λ를 구하라.

4. [10점] 다음의 적분 I를 계산하여라. (단, a는 상수이다.)

$$I = \int_{x^2 + y^2 \le a^2} \left[a - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dx \, dy$$