

열 및 통계 물리 2 (수시고사 1)

출제교수명: 정형채

시험 일자: 2010. 5. 19. 월요일 15:00 - 15:50

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

1. [20점] 서로 구별할 수 없는 N 개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도 T 인 열원과 평형상태에 있다. 이 계의 해밀토니안은

$$H(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \quad (1)$$

로 주어진다.

(a) 계의 에너지가 $E \sim E + \delta E$ 에 있는 상태수 $\Omega(\omega, E, N; \delta E)$ 를 구하라. 필요시 다음을 이용하라.

○ f 차원 구의 부피: $V_f(R) = \frac{\pi^{f/2}}{\Gamma(f/2+1)} R^f$

○ $\int_{aq^2+bp^2=E} dq dp = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{s^2+t^2=E} ds dt$

(b) 이 계의 엔트로피 $S(\omega, E, N)$ 가

$$S(\omega, E, N) = N \left[2 + \ln \left(\frac{E}{N \hbar \omega} \right) - \ln N \right] \quad (2)$$

임을 보이고 $\Delta S = 2S(\omega, E, N) - S(\omega, 2E, 2N)$ 를 구하라. $\Delta S \neq 0$ 인 이유를 물리적으로 설명하라.

2. [30점] 일차원 공간에 있는 어떤 입자의 해밀토니안이

$$H(x, p) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (3)$$

로 주어진다. 이 계의 밀도 행렬을 $\rho = \frac{1}{Z} e^{-H/T}$ 로 쓸 때, 분배 함수 Z 를 구하라. 필요시 $H = \hbar \omega (a^+ a^- + \frac{1}{2})$ 임을 이용하라. 여기서 $a^\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x \mp \frac{ip}{m\omega})$ 이다.

3. [30점] 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4} |\uparrow\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} |\downarrow\uparrow\rangle + \frac{3}{4} |\downarrow\downarrow\rangle$$

로 기술되는 pure 상태에 있다. 여기서 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 은 z -방향의 스핀 up, down 상태를 각각 나타낸다.

(a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 상태 ρ_{AB} 를 구하라.

(b) ρ_A 를 구하고 순수 상태인지 혼합 상태인지 기술하라.

(c) 스핀 A의 x 성분 S_A^x 의 기대값을 구하라.

4. [20점] 각 입자가 가질 수 있는 상태가 x_1, x_2, x_3 로 3가지인 n 개의 입자로 이루어진 계가 있다. 이 계의 상태를 나타내는 방법에는 각각의 입자가 어느 상태에 있는지를 나타내는 입자 표현 방법과 각 상태에 몇 개의 입자가 있는지를 나타내는 점유수 표현 법이 있다. 예를 들어 고전 입자 $n=2$ 로 이루어진 계의 점유수 표현 $|2, 0, 0\rangle$ 은 입자 표현 $|x_1, x_1\rangle$ 에 해당하고 $|1, 1, 0\rangle$ 은 입자 표현 $|x_1, x_2\rangle$ 나 $|x_2, x_1\rangle$ 에 해당한다. 페르미온이나 보존인 경우는

$$|1, 1, 0\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1, x_2\rangle - |x_2, x_1\rangle)$$

$$|1, 1, 0\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1, x_2\rangle + |x_2, x_1\rangle)$$

$$|2, 0, 0\rangle_B = |x_1, x_1\rangle$$

등으로 표현된다. 여기서 $|n_1, n_2, n_3\rangle_F$ 는 페르미온, $|n_1, n_2, n_3\rangle_B$ 는 보존 입자계의 점유수 표현을 나타낸다. $n=3$ 인 경우의 $|1, 1, 1\rangle_F$ 와 $|2, 1, 0\rangle_B$ 를 입자 표현으로 나타내어라.