열 및 통계 물리 2 (수시고사 1)

출제교수명: 정형채 시험 일자: 2010. 3. 24. 월요일 15:00 - 15:50

자연과학 대학 학과 학년 학번: 성명:

1. [20점] 어떤 계의 미시 상태 확률 함수가 ρ일 때, 이 계의 엔트로피 S는

$$S(\rho) \quad = \quad -\langle \ln \rho \rangle$$

로 주어진다.

(a) 미시 상태 x에 있을 확률이 $p(x) = p_x$일 때, 이 계의 엔트로피가

$$S \quad = \quad C_1 \sum_x p_x \ln p_x$$

의 형태로 주어짐을 보이고 상수 C_1를 구하라.

(b) 이 계가 가질 수 있는 미시 상태의 갯수가 Ω개 이고, 각 미시 상태가 일어날 확률이 모두 같아 $p(x) = 1/\Omega$ 로 주어지는 경우, 이 계의 엔트로피를 Ω의 함수로 표시하여라.

2. [30점] 두 개의 Ising 스핀 (s_1, s_2)로 이루어진 계의 해밀토니안이

$$H \quad = \quad -J s_1 \cdot s_2 - B(s_1 + s_2)$$

로 주어진다. 여기서 $s_i \in \{-1, 0, +1\}$이고 $B = J$이다. 이 계가 온도 T인 환경과 열적 평형 상태이 있다.

(a) 이 계의 가능한 상태 수는 9가지이다. 각각의 경우의 에너지를 구하고, $T = \frac{J}{\ln 2}$ 일 때 이 계의 분배함수 Z를 구하여라. (최종 답은 숫자로 적을 것.)

(b) 온도가 $T = \frac{J}{\ln 2}$ 일 때, 계의 평균 에너지 $\langle E \rangle$를 구하라.

(c) 이 계의 자기화 M은

$$M \quad = \quad \langle s_1 + s_2 \rangle$$

로 정의된다. 온도가 $T = 0$인 경우와 $T = \infty$인 경우의 자기화 M_0와 M_∞를 구하라.

3. [50점] 길이 L인 일차원 상자 속에 N개의 입자로 이루어진 이상기체가 고립된 상태에 있다. 이 계의 해밀토니안은

$$H(\{q_i, p_i\}) \quad = \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} & \forall q_i \in [0, L] \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

(a) 이 계의 에너지가 E보다 작은 상태 수 $\Sigma(E)$가

$$\Sigma(E) \quad = \quad \frac{1}{N! h^N} \int_{H(\{q_i, p_i\}) < E} d^N q \, d^N p \tag{1}$$

임을 이용하여

$$\Sigma(E) \quad = \quad f(N) L^{C_1 N} E^{C_2 N} \tag{2}$$

의 형태로 주어짐을 보이고 상수 C_1, C_2를 구하라. [$f(N)$을 구할 필요는 없음.]

(b) 식 (**??**)를 이용하여 이 계의 에너지가 $[E, E + \delta E]$인 상태 수 $\Omega = \Omega\big(f(N), N, L, E; \delta E\big)$를 구하라.

(c) 이 계의 엔트로피가

$$S = g\big(f(N)\big) + C_3 N \ln L + C_4 N \ln E \tag{3}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C_3, C_4를 구하라.

(d) 작은 마른틀 앙상블에서 온도의 정의를 적고 이를 이용하면

$$E \quad = \quad C_5 N T$$

로 적을 수 있음을 보이고 상수 C_5을 구하라.

(e) 이 계의 압력 p는

$$p \quad = \quad -\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)_S$$

로부터 구할 수 있다. 이를 이용하여 이 계의 상태 방정식을 구하라.

(f) 이 계, 두 개를 합쳐 길이 $2L$, 입자수 $2N$, 에너지 $2E$를 갖는 계를 만들었다. 이 때 증가한 엔트로피 ΔS를 식 (**??**)를 이용하여,

$$\Delta S \quad = \quad g\big(f(2N)\big) - 2g\big(f(N)\big) + 2(C_3 + C_4) N \ln 2$$

임을 보여라.

(g) Gibbs의 역설이 없어지기 위한 조건, 즉 $\Delta S = 0$이 되기 위한 $f(N)$ 함수의 형태를 구하라.

(h) 식 (**??**)을 이용 $f(N)$을 계산하면, $f(N)$이 (g)에서 구한 형태를 만족함을 설명하라. [$f(N)$을 정확히 계산할 필요는 없음.]