

열 및 통계 물리 1 (수시고사 1)

출제교수명: 정형채

시험 일자: 2004. 11. 15. 월요일 13:00 - 13:50

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

1. [10점] 등온 압축률 χ 와 등압 열 팽창율 β 를 이름에 걸맞게 적당히 정의하고, 이를 이용하여

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\chi}$$

임을 보여라.

2. [20점] 질량 m 인 자유 입자 3개가 길이 L 인 1차원 상자 에 있는 경우, 계의 에너지 H 는,

$$H(\{x_i, p_i\}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} & \forall x_i \in [0, L] \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

- (a) 이 계의 에너지가 E 보다 적은 상태수, $\Sigma_{cl}(E)$ 를 고전적으로 구하여 $\Sigma_{cl}(E) = C_{cl}L^3(2mE)^{3/2}$ 의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C_{cl} 을 구하라.

- (b) 이 계의 양자 역학적 고유에너지는

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

로 주어진다. $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 < n^2$ 를 만족하는 상태수는 $n_i > 0$ 를 만족하면서 반지름 n 인 구 안에 있는 격자점의 갯수와 같으므로, n 이 큰 경우 대략적으로 $\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} n^3$ 으로 주어진다. 이를 이용하여 에너지가 E 보다 작은 상태수를 양자적으로 계산한 $\Sigma_{qm}(E)$ 역시 $\Sigma_{qm}(E) = C_{qm}L^3(2mE)^{3/2}$ 의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C_{qm} 을 구하라.

3. [20점] 스핀 1/2, 자기 모멘트가 μ 인 입자 N 개가 외부 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$ 영향하에 있다. 스핀끼리의 상호작용은 무시할 수 있어, 해밀토니언이

$$H = -\mu B \sum_{\alpha=1}^N s_{\alpha}^z \quad (1)$$

로 주어진다. 여기서 $s_{\alpha}^z \in \{-1, +1\}$ 이다.

- (a) 자기장 방향의 자기 모멘트를 갖는 ($s^z = +1$) 입자 수가 n_1 이라 할때, 계의 에너지가

$$E = N\mu B - 2n_1\mu B \quad (2)$$

로 주어짐을 보여라.

- (b) 계의 에너지가 $[E, E+dE]$ 구간에 있는 총 상태수 $\Omega(E)$ 가

$$\Omega(E) \approx \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu B}\right)! \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu B}\right)!} \left(\frac{dE}{2\mu B}\right) \quad (3)$$

로 주어짐을 보여라 (단 $\mu B \ll |dE| \ll |E|$ 임).

- (c) 계의 엔트로피 $S(E)$ 는 $S(E) = \ln \Omega(E)$ 에 의해 주어진다. $\ln N! \approx N \ln N - N$ 를 이용하여 계의 엔트로피가

$$S(E) \approx N \ln N - \frac{N}{2} \ln \left(\frac{N^2 - (E/\mu B)^2}{4} \right) + \frac{E}{2\mu B} \ln \left(\frac{N - (E/\mu B)}{N + (E/\mu B)} \right) \quad (4)$$

임을 보여라.

- (d) 통계 역학에서의 절대 온도 정의를 이용하여, 절대온도 T 와 에너지 E 사이의 관계식을 구하고, 온도 T 에서의 자화율

$$M = \mu \sum_{\alpha=1}^N s_{\alpha}^z \quad (5)$$

이

$$M(T, B) = N\mu \tanh \left(\frac{\mu B}{T} \right)$$

로 주어짐을 보여라. (힌트: 자화율 M 은 식 (2)와 (5)에 의해, $M = -E/B$ 로 주어진다.)