열 및 통계 물리 1 (Homework 5)

출제교수명: 정형채 제출일자: 2011. 12. 1. 목요일 13:30

자연과학 대학	학과	학년	학번:	성명:

∘ 문제지와 함께 수업 전에 제출하세요.

1. 스핀 1/2, 자기 모멘트가 μ인 입자 N개가 외부 자기장 $\vec{B} = B\,\hat{z}$ 영향하에 있다. 스핀끼리의 상호작용은 무시할 수 있어, 해밀토니안이

$$H = -\mu B \sum_{\alpha=1}^{N} s_\alpha^z$$

로 주어진다. 여기서 $s_\alpha^z \in \{-1, +1\}$이다.

(a) 자기장 방향의 자기 모멘트를 갖는 ($s^z = +1$) 입자 수가 n_1이라 할때, 계의 에너지가

$$E = N\mu B - 2n_1\mu B$$

로 주어짐을 보여라.

(b) 계의 에너지가 $[E, E + dE]$ 구간에 있는 총 상태수 $\Omega(E)$가

$$\Omega(E) \approx \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu B}\right)!\left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu B}\right)!}\left(\frac{dE}{2\mu B}\right)$$

로 주어짐을 보여라 (단 $\mu B \ll |dE| \ll |E|$ 임).

(c) 계의 엔트로피 $S(E)$가

$$S(E) \approx N\ln N - \frac{N}{2}\ln\left(\frac{N^2 - (E/\mu B)^2}{4}\right) + \frac{E}{2\mu B}\ln\left(\frac{N - (E/\mu B)}{N + (E/\mu B)}\right)$$

임을 보여라.

(d) 통계 역학에서의 절대 온도 정의를 이용하여, 절대온도 T와 에너지 E 사이의 관계식을 구하고, 온도 T에서의 자화율, $M = \mu\sum_{\alpha=1}^{N} s_\alpha^z$이

$$M(T, B) = N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{T}\right)$$

로 주어짐을 보여라.

2. 길이 L인 일차원 상자속에 질량 m인 자유 입자가 두 개가 들어 있어 계의 Hamiltonian은 $x_i \in [0, L]$인 경우

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m}$$

이고 $x_i \notin [0, L]$인 경우 ∞이다. 계의 에너지 범위가 주어졌을 때, 계의 미시 상태 수를 양자역학적 방법과 고전적 방법으로 각각 구하려고 한다. 두 입자는 서로 구별할 수 있다고 가정하라.

(a) 고전 역학적으로, 에너지가 U보다 작은 계의 상태 수 $\Sigma(U)$를 구하여라. 또, 이를 이용하여 에너지가 $[U, U + \delta U]$에 있는 상태수 $\Omega_C(U; \delta U)$를 구하면

$$\Omega_C(U; \delta U) = A_C\, mL^2\delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수 A_C를 구하라.

(b) 양자 역학적으로 계의 에너지 띠는

$$\epsilon(n_1, n_2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right) = \left(n_1^2 + n_2^2\right)\epsilon_0 \qquad (1)$$

로 주어진다. 여기서 ϵ_0는 $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ 이고 n_i는 자연수이다. 에너지가 $U = 11\,\epsilon_0$보다 작은 계의 상태수 $\Sigma_Q(11\,\epsilon_0)$을 구하라.

(c) U가 ϵ_0보다 매우 클 때, 에너지가 $[U, U + \delta U]$에 있는 양자 역학적 상태수 $\Omega_Q(U; \delta U)$를 식 (1)를 이용하여 계산하여

$$\Omega_Q(U; \delta U) = A_Q\, mL^2\delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수 A_Q를 구하라.

3. 부피 V인 상자속에 질량 m인 서로 구분할 수 없는 자유 입자가 N 개가 있다. 이 계의 해밀토니안은,

$$H(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} & \forall\vec{r}_i \in V \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

(a) 계의 에너지 E가 $E \in [U, U + \Delta U]$에 있는 상태수 $\Omega(U; \Delta U, V, N)$를 구하여라.

(b) 이 계의 엔트로피 $S(U, V, N)$가

$$S(U, V, N) = N\left[\ln\left(\frac{V/N}{\lambda^3}\right) + \frac{5}{2}\right]$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 λ를 구하여라.

(c) 온도의 정의를 이용하여 이상기체의 내부에너지와 온도와의 관계식을 구하라.

(d) 위에서 구한 온도와 내부에너지의 관계식을 이용하여, $F = U - TS$로 정의된 자유에너지 $F = F(T, V, N)$를 구하라.

(e) 압력 p가 $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$임을 이용하여 상태방정식을 구하라.

4. 한 입자가 가질 수 있는 에너지 상태가 $-\epsilon$, 0, ϵ 세 개인 계가 있다. 여기서 $\epsilon > 0$이다.

(a) 입자 한 개가 온도 $T = \frac{1}{\beta}$인 환경과 평형상태에 있을 때, 한 개 입자의 분배함수 Z_1은

$$Z_1 = 1 + e^A + e^B$$

의 형태로 쓸 수 있음을 보이고 A와 B를 β와 ϵ의 함수로 구하라.

(b) N개 입자로 이루어진 닫힌 계의 해밀토니안은 각각의 입자가 가지는 에너지의 합으로 주어진다. 입자간 구분이 불가능할 때, $Z_N = \frac{1}{N!}Z_1^N$임을 이용하여 분배함수 $Z_N(N, \beta, \epsilon)$를 구하라.

(c) N개 입자가 서로 구분 가능할 때 분배함수 $Z_N^D(N, \beta, \epsilon)$를 구하라.

(d) 구분 가능한 입자 N개로 이루어진 계의 평균에너지 $U^D = \langle E^D\rangle$를 구하여라.

5. 교재 93쪽, 문제 6-1