열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채 시행일자: 2011. 10. 20. 목요일 13:30 – 14:45

자연과학 대학 학과 학년, 학번: 성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- **과제 3**: 문제지는 가지고 가서 풀어 10월 25일 수업 전 제출

1. [50점] 열역학 큰퍼텐셜 Φ는

$$\begin{aligned}\Phi &= F - \mu N \\ &= U - TS - \mu N\end{aligned}$$

으로 정의된다. 열역학 1법칙

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

을 이용, $d\Phi$를 구하고 Φ가 어떤 변수의 함수인지 밝혀라. 또, 압력 p, 평균 입자수 N, 엔트로피 S를 Φ의 편미분 형태로 나타내라.

2. [70점] 어떤 입자가 퍼텐셜

$$U(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{for } y \in [0,L] \\ \infty & \text{for } y \notin [0,L] \end{cases}$$

속에서 2차원 운동을 하고 있다. 즉,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

로 주어지는 Hamiltonian을 가지고 $y \in [0 \ \ L]$에서 운동하고 있다. 에너지가 U보다 작은 상태수 $\Sigma(U)$ 및 에너지가 $[U, U+\delta U]$ 사이에 있는 상태수 $\Omega(U;\delta U)$를 구하여라. (필요한 경우 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \le 1$로 주어지는 타원체의 부피는 $V = \frac{4\pi}{3}abc$임을 이용하라.)

3. [80점] 단열된 진공 상자속에 $T_A = 87°\mathrm{C}$ (360K)의 물 $10\,g$이 들어있는 병 A와 $T_B = 27°\mathrm{C}$의 물 $10\,g$이 들어있는 병 B를 접촉시켜 놓았다. 두 병은 준정적과정으로 열을 교환하여 모두 $T_C = 57°\mathrm{C}$가 되었다. 필요한 경우, $\ln(300) \approx 5.704$, $\ln(330) \approx 5.799$, $\ln(360) \approx 5.886$ 임을 사용하라.

(a) 준정적과정에서는 $đQ = T\,dS$를 만족한다. 27°C에서 87°C까지에서 정적 비열 c_v가 일정하다고 가정하고 물 A의 엔트로피 변화 ΔS_A와 물 B의 엔트로피 변화 ΔS_B를 구하여라. 물의 단위 그램(g)당 비열 c_v는 $c_v \approx 4.18\ \frac{J}{g\cdot K} \approx 2.6\times 10^{19}\ \frac{eV}{g\cdot K} \approx 3.0 \times 10^{23}\ \frac{1}{g}$ 임을 이용하라.

(b) A, B 물이 각각 87°C, 27°C 물로 있을 때의 총 상태수를 Ω_i라 하고 둘 다 57°C로 있을 때의 총 상태수를 Ω_f라 할 때, 두 상태수의 비 $\frac{\Omega_i}{\Omega_f}$를 구하여라.

4. [100점] 동전 두 개로 이루어진 시스템 S가 동전 N로 이루어진 환경 R과 서로 상호작용하여 전체 동전 N+2개중 앞면의 수가 mN개로 유지된다. 여기서 m은 유리수로 $m \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, \frac{N+2}{N}\}$ 이다. 시스템 S가 가질수 있는 상태 x는 x_1 =(뒤,뒤), x_2 =(뒤,앞), x_3 =(앞,뒤), x_4 =(앞,앞)의 4가지이다. 각 상태에 있을 확률을 $p(x_i)$라 하자.

(a) $N = 100$, $m = 1/4$인 경우, 환경 R의 앞면 수가 k인 가지수 $\Omega_R(k) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ 임을 이용하여

$$r_2 = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} = 25/76$$

임을 보여라.

(b) $N = 100$, $m = 1/4$인 경우 $r_3 = \frac{p(x_3)}{p(x_1)}$, $r_4 = \frac{p(x_4)}{p(x_1)}$ 를 구하고, r_2, r_3, r_4로 부터 $p(x_i)$를 구하는 방법을 설명하라.

(c) 전체 동전중 앞면 수가 mN이고 환경이 충분히 커서 $N \gg 1$인 경우, $r_2 = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} = \frac{m}{1-m}$ 임 보이고 $r_3 = \frac{p(x_3)}{p(x_1)}$, $r_4 = \frac{p(x_4)}{p(x_1)}$ 를 구하라. 단 $0 < m < 1$임.

(d) 환경 R의 N개 동전 중 앞면수가 mN인 경우, 환경의 엔트로피 $S_R = \ln \Omega_R$이

$$S_R = -N\left[m \ln m + (1-m)\ln(1-m)\right]$$

로 주어짐을 보여라. $N \gg 1$라고 가정하고

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

를 사용하라.

(e) $N \gg 1$인 경우, 환경 R의 온도 T_R를

$$\frac{1}{T_R} = \frac{1}{N}\frac{\partial S_R}{\partial m}$$

라 정의하자. 이 경우, $\frac{1}{T_R}$를 계산하고, (c)에 서 구한 $\frac{p(x_i)}{p(x_1)}$가

$$\frac{p(x_i)}{p(x_1)} = e^{-(E_i - E_1)/T_R}$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 E_i는 x_i상태인 시스템 S의 동전 앞면수이다.