열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채 　　　　　　　　　　제출일자: 2011. 9. 20. 화요일 13:30

자연과학 대학 　　　　학과 　　　학년 　　학번: 　　　　　　　　성명:

- ∘ 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요.
- ∘ 제출시간 이후 제출한 것은 20% ∼ 50%의 감점이 있습니다.
- ∘ 수시고사 : 9월 22일 (목)
  - 시험 일정은 http://dasan.sejong.ac.kr/~hcj/zhtml/CSM.html 에서 확인 가능합니다.

---

1. Gamma 함수를 이용하여, $N \gg 1$인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

(a) Gamma 함수 $\Gamma(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{1}$$

임을 보여라.

(b) $\Gamma(1) = 1$임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^\infty t^N e^{-t} dt \end{aligned} \tag{2}$$

임을 보여라. 여기서 N 은 자연수이다.

(c) 식(2)의 피적분 함수 $F(t) = t^N e^{-t}$는 $t = N$에서 최대가 됨을 보이고 $\ln F(t) = N \ln t - t$를 $t = N$근처에서 전개하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \tag{3}$$

임을 보여라.

(d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^\infty N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}}\, d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}}\, d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \end{aligned}$$

임을 보여라.

2. 결정체 표면 형태를 나타내는 원자쌓기 (Solid-On-Solid) 모형을 생각해보자. 1차원의 경우, 길이 L인 원자 쌓기 모형의 상태는

$$x = (h_1, h_2, \ldots, h_L)$$

로 주어진다. 여기서 $h_i \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$는 i번째 위치의 표면 높이이다. 이 모형의 Hamiltonian이

$$H = \epsilon \sum_{i=1}^{L} |h_i - h_{i+1}|$$

로 주어지는 경우, 아래 물음에 답하라. 주기 경계 조건을 사용하여 $h_{L+1} = h_1$임을 이용하고 전체 원자수

$$N = \sum_{i=1}^{L} h_i$$

은 보존됨을 이용하라.

(a) $N = 2$, $L = 4$인 계의 가능한 상태를 모두 나열하고 각 상태의 에너지를 적어라.

(b) 가능한 에너지 준위를 모두 나열하고, 각각의 에너지 준위에 대한 상태수 (number of states)를 구하라.

3. 1차원 운동을 하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + mgy & \text{for } \quad y \geq 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

(a) 이 입자 에너지가 U 보다 작을 때의 상태를 위상 공간에 그래프로 나타내어라.

(b) 이 입자 에너지가 U보다 작은 상태수 $\Sigma(U)$를 구하여라.

(c) 이 입자 에너지가 $[U, U + \delta U]$ 사이에 있는 상태수 $\Omega(U; \delta U)$를 구하여라.

4. 다음의 적분을 계산하여라. (단, a, b, h는 상수이다.)

$$(a) \quad \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} h\, dx\, dy$$

$$(b) \quad \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} \frac{h}{a}|x|\, dx\, dy$$

5. 수업 첫시간부터 9월 15일까지 수업내용 중 수시고사 예상 문제 1개를 각자 만들어 풀이와 함께 제출하라.