

## 열 및 통계 물리 2 (Homework 1)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2011. 03. 21. 일요일 15:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.

○ 마감 후 제출: 20% ~ 50%의 감점

○ **3월 23일: 수시 고사**

○ 기출 문제는 [dasan.sejong.ac.kr/~hcj](http://dasan.sejong.ac.kr/~hcj) 참조

1. Helmholtz 자유에너지  $F$ 는  $F = U - TS$ 로 주어진다. 여기서  $U$ 는 계의 평균에너지이고  $S$ 는 계의 엔트로피이다. 엔트로피가  $S = -\sum_x p_x \ln p_x$ 로 주어짐을 이용하여, 온도  $T$ 이고 분배함수가  $Z$ 인 닫힌계의 자유에너지가  $F = -T \ln Z$ 로 주어짐을 보여라.

2. 한 입자가 가질 수 있는 에너지 상태가  $-\epsilon, 0, \epsilon$  세 개인 계가 있다. 여기서  $\epsilon > 0$ 이다.

(a) 입자 한 개가 온도  $T = \frac{1}{\beta}$ 인 환경과 평형상태에 있을 때, 한 개 입자의 분배함수  $Z_1$ 은

$$Z_1 = 1 + e^A + e^B$$

의 형태로 쓸 수 있음을 보이고  $A$ 와  $B$ 를  $\beta$ 와  $\epsilon$ 의 함수로 구하라.

(b)  $N$ 개 입자로 이루어진 닫힌 계의 해밀토니안은 각각의 입자가 가지는 에너지의 합으로 주어진다. 입자간 구분이 불가능할 때,  $Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N$ 임을 이용하여 분배함수  $Z_N(N, \beta, \epsilon)$ 를 구하라.

(c) 온도  $T = \frac{1}{\beta}$ , 화학 퍼텐셜  $\mu$ 인 환경과 열린 상태로 평형을 이루고 있다. 대분배함수  $Z_G$ 를 구하라.

(d) (c)의 열린계의 평균 입자수  $\langle N \rangle$ 를 구하라.

3. 양자 역학의 기본 가정을 기술하라.

4. 1차원 조화진동자 퍼텐셜상에 있는 입자의 해밀토니안  $H$ 가

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

로 주어진다. 고유치 문제

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (1)$$

를 만족하는 고유상태  $|\psi\rangle$ 의 실공간 표현  $\psi(x)$ 와 운동량 공간 표현  $\psi(p)$ 이라고 하자.

(a) 연산자  $x$ 와  $p$ 의,  $x$  고유치  $|x'\rangle$  표현이

$$\begin{aligned} \langle x'|x &= x'\langle x'| \\ \langle x'|p &= -i\hbar \frac{d}{dx'} \langle x'| \end{aligned}$$

라 하면,  $\langle x|[x, p] = i\hbar \langle x|$  임을 보여라.

(b) 식 (1)과 (a)의 결과를 이용하여  $\psi(x)$ 가 만족하는 미분 방정식을 구하라.

(c) 식 (1)의 운동량 공간 표현을 이용하여  $\psi(p)$ 가 만족하는 미분 방정식을 구하라.

5.

(a) [10점]  $z$ -방향의 스핀 up 상태  $|\uparrow_z\rangle$ 와  $x$ -방향의 스핀 up 상태  $|\uparrow_x\rangle$ 를  $z$ -방향의 스핀 고유상태(eigen state)를 기저(basis)로 하여 행벡터로 표현하여라.

(b) [10점]  $x$ -방향의 스핀 up 상태  $|\uparrow_x\rangle$  60%와  $x$ -방향의 스핀 down 상태  $|\downarrow_x\rangle$  40%가 섞여있는 혼합(mixed) 상태를  $z$ -방향의 스핀 고유상태(eigen state)를 기저(basis)로 하여 행렬로 나타내어라.