

열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2010. 10. 18. 일요일 15:00 - 16:20

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- **과제 3:** 문제지는 가지고 가서 풀어 10월 26일 제출

1. [60점] 세 개의 스핀 ( $s_1, s_2, s_3$ )로 이루어진 계의 해밀토니언이

$$H = -J \sum_i \delta_{s_i s_{i+1}}$$

로 주어진다. 여기서  $s_i \in \{1, 2, 3\}$ 이고  $\delta_{s_i s_{i+1}}$ 는  $s_i$ 와  $s_{i+1}$ 이 같을 때는 1, 다를 때에는 0의 값을 갖는다. 문제를 간단히 하기 위해  $s_1 = 1$ 로 고정되어 있다고 하자. 주기 경계 조건을 이용하여  $s_4 = s_1$ 으로 놓고 아래 물음에 답하라.

- (a) 이 계가 갖을 수 있는 에너지  $U$ 를 모두 적고, 각각의 에너지에 대하여 미시적 상태수  $\Omega(U)$ 를 구하라.
- (b) 이 계가 온도  $T = J/\ln 2$ 인 환경과 평형 상태에 놓여있다. 이 계의 분배함수  $Z$ 를 구하여라.
- (c) 이 계가 온도  $T = J/\ln 2$ 인 환경과 평형 상태에 놓여있을 때, 두 번째 스핀값  $s_2$ 가 1일 확률  $p(s_2 = 1)$ 을 구하여라.

2. [60점] 길이  $L$ 인 일차원 상자속에 질량  $m$ 인 자유 입자가 두 개가 들어있어 계의 Hamiltonian은  $x_i \in [0, L]$ 인 경우

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m}$$

이고  $x_i \notin [0, L]$ 인 경우  $\infty$ 이다. 계의 에너지 범위가 주어졌을 때, 계의 미시 상태 수를 양자역학적 방법과 고전적 방법으로 각각 구하려고 한다. 두 입자는 서로 구별할 수 있다고 가정하라.

- (a) 고전 역학적으로, 에너지가  $U$ 보다 작은 계의 상태 수  $\Sigma(U)$ 를 구하여라. 또, 이를 이용하여 에너지가  $[U, U + \delta U]$ 에 있는 상태수  $\Omega_C(U; \delta U)$ 를 구하면

$$\Omega_C(U; \delta U) = A_C m L^2 \delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수  $A_C$ 를 구하라.

- (b) 양자 역학적으로 계의 에너지 띠는

$$\epsilon(n_1, n_2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2) = (n_1^2 + n_2^2) \epsilon_0 \quad (1)$$

로 주어진다. 여기서  $\epsilon_0$ 는  $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$  이고  $n_i$ 는 자연수이다. 에너지가  $U = 11\epsilon_0$ 보다 작은 계의 상태수  $\Sigma_Q(11\epsilon_0)$ 을 구하라.

- (c)  $U$ 가  $\epsilon_0$ 보다 매우 클 때, 에너지가  $[U, U + \delta U]$ 에 있는 양자 역학적 상태수  $\Omega_Q(U; \delta U)$ 를 식 (1)를 이용하여 계산하여

$$\Omega_Q(U; \delta U) = A_Q m L^2 \delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수  $A_Q$ 를 구하라.

3. [40점] 동전 A, B로 이루어진 시스템 S와 동전 C, D, E, F로 이루어진 환경 R이 서로 상호작용하여 전체 동전 6개 중 앞면인 것이 3개로 유지된다.

- (a) 시스템 S가 가질 수 있는 상태  $x$ 는  $x_1 = (\text{뒤}, \text{뒤}), x_2 = (\text{뒤}, \text{앞}), x_3 = (\text{앞}, \text{뒤}), x_4 = (\text{앞}, \text{앞})$ 의 4가지 상태이다. 각 상태에 있을 확률  $p(x_i)$ 를 구하라.
- (b) 시스템 S에 있는 동전의 앞면수를  $E$ 라 할 때,  $P(E = 0), P(E = 1), P(E = 2)$ 를 구하라.

4. [60점] 닫힌계 S가 온도  $T$ 인 환경 R과 열적 평형 상태에 있다. 닫힌계 S가 상태  $x$ 에 있을 때 에너지를  $E_x$ 라 하자. 문제 3번의 메타포를 이용하여 다음 물음에 답하라.

- (a) 시스템 S가  $x$ 상태에 있을 확률  $p(x)$ 가

$$p(x) = C e^{-\beta E_x}$$

로 주어짐을 유도하고  $C$ 와  $\beta$ 는 무엇인지 계산하라.

- (b) 시스템 S가 에너지  $E$ 를 가질 때의 엔트로피를  $\sigma(E)$ 로 나타낼 때, 시스템 S가 에너지  $E$ 를 가질 확률  $P(E)$ 를  $C, \beta, \sigma(E), E$ 의 함수로 나타내어라.

5. [20점] Helmholtz 자유에너지  $F$ 는  $F = U - TS$ 로 주어진다. 여기서  $U$ 는 계의 평균에너지이고  $S$ 는 계의 엔트로피이다. 엔트로피가  $S = -\sum_x p_x \ln p_x$ 로 주어짐을 이용하여, 온도  $T$ 이고 분배함수가  $Z$ 인 닫힌계의 자유에너지가  $F = -T \ln Z$ 로 주어짐을 보여라.

6. [60점] 서로 구별할 수 없는  $N$ 개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도  $T$ 인 열원과 평형 상태에 있다. 이 계의 해밀토니언은

$$H(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \quad (2)$$

로 주어진다.

- (a) 이 계의 분배함수  $Z(N, T, \omega)$ 이

$$Z(N, T, \omega) = \frac{1}{N!} \left( \frac{T}{\hbar \omega} \right)^N \quad (3)$$

로 주어짐을 보여라.

- (b) 평균 에너지  $U = \langle E \rangle$ 를 구하라.

- (c) Helmholtz 자유에너지  $F = F(\omega, T, N)$ 를 구하라. 를 구하여라.