열 및 통계 물리 2 (Homework 4)

출제교수명: 정형채 　　제출일자: 2010. 05. 17. 월요일 15:00

자연과학 대학	학과	학년	학번:	성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 이후 제출한 것은 30% ∼ 50%의 감점이 있습니다.

---

1. 스핀 $\frac{1}{2}$인 입자 세 개 ABC로 이루어진 계가 어떤 순간에 state ket

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

로 기술되는 pure 상태에 있다. 여기서 $|\updownarrow\updownarrow\updownarrow\rangle$는

$$|\updownarrow\updownarrow\updownarrow\rangle = |\updownarrow_A\updownarrow_B\updownarrow_C\rangle = |\updownarrow_A\rangle|\updownarrow_B\rangle|\updownarrow_C\rangle$$

를 나타내고 $|\updownarrow_\alpha\rangle$은 α입자의 z 방향 고유 상태를 나타낸다.

(a) ABC 스핀의 상태를 밀도 연산자로 나타내어라

(b) AB 스핀의 상태를 밀도 연산자로 나타내어라

(c) A 스핀의 상태를 밀도 연산자로 나타내어라

(d) 스핀 A의 x 성분 S_A^x의 기대값을 구하라.

2. 부피 V인 상자속에 들어있는 자유입자 한 개의 해밀토니안은 $H = \frac{p^2}{2m}$으로 주어지고 H의 고유상태를 $|\vec{k}\rangle$라 할 때, 고유 에너지는 $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$으로 주어진다. 이 자유입자의 분배함수

$$Z(T, V, 1) = Tr\, e^{-H/T}$$

가 V/λ^3으로 주어짐을 보이고 λ를 h, m, T의 함수로 구하여라.

3. 해밀토니안이 $H = \frac{p^2}{2m}$으로 주어지는 일차원 자유입자가 온도 T인 환경과 열적 평형상태에 있다.

(a) 이 계의 밀도 행렬 ρ는

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-H/T}$$

의 형태로 적을 수 있다. 분배함수 Z를 구하여라.

(b) 밀도 행렬의 운동량 공간 성분

$$\rho_{kk'} = \langle k|\rho|k'\rangle$$

을 구하라.

(c) 밀도 행렬의 실공간 성분

$$\rho(x, x') = \langle x|\rho|x'\rangle$$

을 구하라.

4. 1차원 공간 [0, L]에 제한되어 운동을 하는 어떤 입자의 상태가 $|f\rangle$로 기술된다. 이를 표현하기 위한 (연속) 실공간 기저 (base)는 $\{\,|x\rangle|x \in [0, L]\,\}$ 로 주어지고 파속 (운동량) 공간 기저 (base)는 $\{\,|k\rangle|k = \frac{2n\pi}{L}, n \in \mathbb{Z}\}$ 로 주어진다. 두 base sets간의 내적은 $\langle k|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}$로 주어진다. 아래 물음에 답하라.

(a) 내적 $\langle x|k\rangle$ 를 구하라.

(b) 상태 $|f\rangle$의 파-공간 k 성분 $\tilde{f}(k) = \langle k|f\rangle$와 실-공간 x 성분 $f(x) = \langle x|f\rangle$의 관계가

$$\tilde{f}(k) = A \int_B^C f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 A, B, C를 구하라.

(c) $|f\rangle$의 실-공간 성분은 $\tilde{f}(k)$로부터도 구할 수 있다. $\langle k|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}$임을 이용하여

$$f(x) = D \sum_k \tilde{f}(k)\, e^{ikx} \tag{1}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 D 값을 구하라.

(d) 입자가 놓인 공간 크기 L이 충분히 커짐에 따라 식 (1)은 적분 형태로 근사될 수 있다. 문제에서 주어진 파속 공간의 기저에서 구한 Δk를 이용하여 식(1)이

$$f(x) = E \int_F^G \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\, dk \tag{2}$$

로 적을 수 있음을 보이고 E, F, G를 구하라.

5. 교재 165쪽, 9-1