열 및 통계 물리 2 (Homework 2)

출제교수명: 정형채 제출일자: 2010. 04. 05. 월요일 15:00

자연과학 대학 학과 학년 학번: 성명:

- ∘ 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- ∘ 제출시간 이후 제출한 것은 30% ∼ 50%의 감점이 있습니다.

---

1. [4점] 일차원 운동을 하는 입자의 에너지가

$$E = \frac{p^2}{2m} + \kappa x^4$$

로 주어진다. 이 입자가 온도 T인 열저장고와 평형상태에 있을 때,

(a) $\langle p^2 \rangle$를 구하라

(b) $\langle x^4 \rangle$를 구하라

2. [6점]

(a) 부피 V인 3차원 상자속의 N개의 단원자로 이루어진 이상 기체가 있다. 이경우 Hamiltonian은 $\vec{q}_i \in V$인 경우

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{p_{\alpha,i}^2}{2m}$$

이고 $\vec{q}_\alpha \notin V$인 경우 ∞이다. 이 기체(gas) 계의 온도가 T_g일 때, 바른틀 앙상블을 이용하여 자유 에너지 $F(V,N,T_g)$를 구하라.

(b) 위 계의 화학 퍼텐셜 μ를 온도 T_g와 입자 밀도 $n_g := N/V$의 함수로 구하라.

(c) 위의 기체속에 원자가 흡착될 수있는, 면적 A인 결정체의 표면이 노출되어있다. 흡착에너지는 ϵ_a이고 표면에 흡착된 원자의 운동은 2차원 이상기체 운동으로 기술된다고 가정하자. 즉 표면계의 Hamiltonian은 $\vec{q}_i \in A$인 경우

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} - \epsilon_a\right)$$

이고 $\vec{q}_\alpha \notin A$인 경우 ∞이다. 표면의 온도가 T_a이고 표면에 N_a개의 흡착 원자가 있을 때, 바른틀 앙상블을 이용하여 자유 에너지 $F(A,N_a,T_a)$를 구하라.

(d) 표면 원자의 화학 퍼텐셜을 μ_a를 온도 T_a와 표면의 입자 밀도 $n_a := N_a/A$의 함수로 구하라.

(e) 표면의 원자들과 기체가 평형 상태에 있을 때, $T_a = T_g$, $\mu_a = \mu_g$를 만족한다. 이로 부터 n_a와 n_g의 관계식을 구하라.

(f) $\epsilon_a = 0$인 경우 n_a와 n_g의 관계식을 적고 그 의미를 논하라.

3. [5점] 구분 불가능한 N개의 단원자로 이루어진 기체가 조화 진동자 포텐셜 안에 있다. 이경우 Hamiltonian, H는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_{\alpha,i}^2\right). \qquad (1)$$

여기서 $r_{\alpha,i}$ 와 $p_{\alpha,i}$는 $\alpha(\alpha = 1,\ldots,N)$번째 입자의 좌표와 운동량의 $i(i = x,y,z)$성분을 각각 나타내고 m은 입자의 질량이고 $m\omega^2$는 조화 진동자 용수철 상수이다.

(a) 절대온도 T인 저장실(reservoir)과 열적 평형상태를 이룰 때, 고전적 분배함수(partition function)가 $Z(T,\omega,N)$이

$$Z(T,\omega,N) = \frac{1}{N!}\left[\frac{T}{\hbar\omega}\right]^{3N} \qquad (2)$$

로 주어짐을 보여라.

(b) Helmholtz 자유에너지는 $F = -T\ln Z$로 주어진다. 화학 포텐셜(chemical potential) $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$가

$$\mu = T\left[\ln N - 3\ln\frac{T}{\hbar\omega}\right] \qquad (3)$$

로 주어짐을 보여라.

(c) Potential밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 계의 입자 수 평균은 저장실의 화학 포텐셜에 의해 조정되고, 대분배 함수 $Z_G = \sum_N \zeta^N Z(T,\omega,N)$을 고려하여 구할 수 있다. 여기서 $\zeta = e^{\beta\mu}$임. 화학 포텐셜 μ, 온도 T를 갖는 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때 대분배 함수 Z_G와 평균 입자수 $\langle N \rangle$를 구하라. 이로부터 μ를 $\langle N \rangle, \omega, T$의 함수로 표시하면, (b)와 같은 결과가 됨을 보여라.

(d) f-차원의 조화 진동자의 가능한 에너지 값을 양자역학적으로 계산하면 $|n_1,\ldots,n_f\rangle$ 상태의 에너지는

$$E(n_1,\ldots,n_f) = \left[\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(n_f + \frac{1}{2}\right)\right]\hbar\omega$$

로 주어진다. $f = 3N$인 경우 분배 함수를 계산하고 어떤 극한에서 식 (??)의 고전 분배 함수가 되는지 밝혀라.

4. [5점] 교재 134쪽, 8-3