

열 및 통계 물리 2 (Homework 2)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2010. 04. 05. 월요일 15:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 풀 문제는 O표, 일부만 풀 문제는 삼각형, 안 풀 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 이후 제출한 것은 30% ~ 50%의 감점이 있습니다.

1. [4점] 일차원 운동을 하는 입자의 에너지가

$$E = \frac{p^2}{2m} + \kappa x^4$$

로 주어진다. 이 입자가 온도 T 인 열저장고와 평형상태에 있을 때,

- (a) $\langle p^2 \rangle$ 를 구하라
- (b) $\langle x^4 \rangle$ 를 구하라

2. [6점]

(a) 부피 V 인 3차원 상자속의 N 개의 단원자로 이루어진 이상 기체가 있다. 이 경우 Hamiltonian은 $\vec{q}_i \in V$ 인 경우

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{p_{\alpha,i}^2}{2m}$$

이고 $\vec{q}_\alpha \notin V$ 인 경우 ∞ 이다. 이 기체(gas) 계의 온도가 T_g 일 때, 바른틀 앙상블을 이용하여 자유 에너지 $F(V, N, T_g)$ 를 구하라.

- (b) 위 계의 화학 퍼텐셜 μ 를 온도 T_g 와 입자 밀도 $n_g := N/V$ 의 함수로 구하라.
- (c) 위의 기체속에 원자가 흡착될 수 있는, 면적 A 인 결정체의 표면이 노출되어 있다. 흡착에너지는 ϵ_a 이고 표면에 흡착된 원자의 운동은 2차원 이상기체 운동으로 기술된다고 가정하자. 즉 표면계의 Hamiltonian은 $\vec{q}_i \in A$ 인 경우

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \left(\sum_{i=1}^2 \frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} - \epsilon_a \right)$$

이고 $\vec{q}_\alpha \notin A$ 인 경우 ∞ 이다. 표면의 온도가 T_a 이고 표면에 N_a 개의 흡착 원자가 있을 때, 바른틀 앙상블을 이용하여 자유 에너지 $F(A, N_a, T_a)$ 를 구하라.

- (d) 표면 원자의 화학 퍼텐셜을 μ_a 를 온도 T_a 와 표면의 입자 밀도 $n_a := N_a/A$ 의 함수로 구하라.
- (e) 표면의 원자들과 기체가 평형 상태에 있을 때, $T_a = T_g$, $\mu_a = \mu_g$ 를 만족한다. 이로부터 n_a 와 n_g 의 관계식을 구하라.
- (f) $\epsilon_a = 0$ 인 경우 n_a 와 n_g 의 관계식을 적고 그 의미를 논하라.

3. [5점] 구분 불가능한 N 개의 단원자로 이루어진 기체가 조화 진동자 포텐셜 안에 있다. 이 경우 Hamiltonian, H 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_{\alpha,i}^2 \right). \quad (1)$$

여기서 $r_{\alpha,i}$ 와 $p_{\alpha,i}$ 는 $\alpha (\alpha = 1, \dots, N)$ 번째 입자의 좌표와 운동량의 $i (i = x, y, z)$ 성분을 각각 나타내고 m 은 입자의 질량이고 $m\omega^2$ 는 조화 진동자 용수철 상수이다.

(a) 절대온도 T 인 저장실(reservoir)과 열적 평형상태를 이룰 때, 고전적 분배함수(partition function)가 $Z(T, \omega, N)$ 이

$$Z(T, \omega, N) = \frac{1}{N!} \left[\frac{T}{\hbar \omega} \right]^{3N} \quad (2)$$

로 주어짐을 보여라.

(b) Helmholtz 자유에너지는 $F = -T \ln Z$ 로 주어진다. 화학 퍼텐셜(chemical potential) $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ 가

$$\mu = T \left[\ln N - 3 \ln \frac{T}{\hbar \omega} \right] \quad (3)$$

로 주어짐을 보여라.

(c) Potential밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 계의 입자 수 평균은 저장실의 화학 퍼텐셜에 의해 조정되고, 대분배함수 $Z_G = \sum_N \zeta^N Z(T, \omega, N)$ 을 고려하여 구할 수 있다. 여기서 $\zeta = e^{\beta \mu}$ 임. 화학 퍼텐셜 μ , 온도 T 를 갖는 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때 대분배함수 Z_G 와 평균 입자수 $\langle N \rangle$ 를 구하라. 이로부터 μ 를 $\langle N \rangle, \omega, T$ 의 함수로 표시하면, (b)와 같은 결과가 됨을 보여라.

(d) f -차원의 조화 진동자의 가능한 에너지 값을 양자역학적으로 계산하면 $|n_1, \dots, n_f\rangle$ 상태의 에너지는

$$E(n_1, \dots, n_f) = \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(n_f + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar \omega$$

로 주어진다. $f = 3N$ 인 경우 분배 함수를 계산하고 어떤 극한에서 식 (??)의 고전 분배 함수가 되는지 밝혀라.

4. [5점] 교재 134쪽, 8-3