

열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2008. 9. 17. 수요일 15:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 이후 제출한 것은 20% ~ 50%의 감점이 있습니다.
- 제출일 수업시간에 숙제 내용에 대한 수시 고사를 시행할 수 있습니다.

1. Gamma 함수를 이용하여, $N \gg 1$ 인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

(a) Gamma 함수 $\Gamma(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{1}$$

임을 보여라.

(b) $\Gamma(1) = 1$ 임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^{\infty} t^N e^{-t} dt \end{aligned} \tag{2}$$

임을 보여라. 여기서 N 은 자연수이다.

(c) 식(2)의 피적분 함수 $F(t) = t^N e^{-t}$ 는 $t = N$ 에서 최대가 됨을 보이고 $\ln F(t) = N \ln t - t$ 를 $t = N$ 근처에서 전개하여,

$$F(N + \epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \tag{3}$$

임을 보여라.

(d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^{\infty} N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \end{aligned}$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

임을 보여라.

2. Hamiltonian이 아래와 같이 주어지는 1차원 Ising 모형을 생각해보자

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}$$

여기서 $s_i \in \{+1, -1\}$ 이고 주기 경계 조건을 사용하여 $s_{N+1} = s_1$ 로 주어진다. $N = 4$ 인 계 (system)의 경우에 대하여 다음을 풀어라.

- (a) 계의 가능한 에너지 준위 (energy level)을 모두 나열하라.
- (b) 각각의 에너지 준위에 대한 상태수 (number of states or degeneracy)를 구하라.

3. f -차원 구의 부피를 구하라.

4. 1차원 운동을 하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + mgy & \text{for } y > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

- (a) 이 입자 에너지가 U 보다 작을 때의 상태를 위상 공간에 그래프로 나타내어라.
- (b) 이 입자 에너지가 U 보다 작은 상태수 $\Sigma(U)$ 를 구하여라.
- (c) 이 입자 에너지가 $[U, U + \delta U]$ 사이에 있는 상태수 $\Omega(U; \delta U)$ 를 구하여라.

5. 다음의 적분을 계산하여라. (단, a, b, h 는 상수이다.)

$$(a) \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} h \, dx \, dy$$

$$(b) \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{h}{a} |x| \, dx \, dy$$

6. [0점] 위키 피디아 (www.wikipedia.org)에서 다음 용어를 찾아 그 의미를 알아보자.

(en.wikipedia.org/wiki/Main_Page 참조).

- Boltzmann constant