

## 열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2007. 10. 04. 목요일 15:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 이후 제출한 것은 20% ~ 50%의 감점이 있습니다.
- 제출일 수업시간에 숙제 내용에 대한 수시 고사를 시행할 수 있습니다.

1. [4점] Gamma 함수를 이용하여,  $N \gg 1$ 인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

- (a) Gamma 함수  $\Gamma(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (1)$$

임을 보여라.

- (b)  $\Gamma(1) = 1$ 임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^{\infty} t^N e^{-t} dt \end{aligned} \quad (2)$$

임을 보여라. 여기서  $N$  은 자연수이다.

- (c) 식(2)의 피적분 함수  $F(t) = t^N e^{-t}$ 는  $t = N$ 에서 최대가 됨을 보이고  $\ln F(t) = N \ln t - t$ 를  $t = N$ 근처에서 전개하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \quad (3)$$

임을 보여라.

- (d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^{\infty} N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \end{aligned}$$

임을 보여라.

2. [2점] 1차원 운동을 하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + mgy & \text{for } y > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

- (a) 이 입자 에너지가  $E$  보다 작을 때의 상태를 위상 공간에 그래프로 나타내어라.  
 (b) 이 입자 에너지가  $E$ 보다 작은 상태수  $\Sigma(E)$ 를 구하여라.  
 (c) 이 입자 에너지가  $[E, E + \delta E]$  사이에 있는 상태수  $\Omega(E; \delta E)$ 를 구하여라.

3. [2점] 입자 하나는 3개의 양자 상태  $\epsilon, 0, -\epsilon$  중 한 상태만 가질 수 있다. (서로 구분 가능한) 입자 다섯 개로 이루어진 계의 총 에너지가  $E$ 일 때 상태 수를  $E = 0$ 와  $E = \epsilon$ , 일 때, 각각 구하여라.

4. [2점] 교재 27쪽, 문제 2-4.

5. [0점] 위키 피디아 ([www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org))에서 다음 용어를 찾아 그 의미를 알아보자.

([en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page) 참조).

- Density of states