열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채 제출일자: 2006. 9. 26. 화요일 15:00

자연과학 대학	학과	학년	학번:	성명:

1. [2점]

(a) 확률 변수 k가 이항분포 $B(N,p)$를 따를 때, 즉

$$k \sim B(N,p)$$

일 때, 확률 분포 함수 $p(k)$을 적고, 평균과 분산, $\langle k\rangle$, $\langle(\Delta k)^2\rangle$를 구하라.

(b) 확률 변수 k가 포아송분포 $P(\mu)$를 따를 때, 즉

$$k \sim P(\mu)$$

일 때, 확률 분포 함수 $p(k)$을 적고, 평균과 분산, $\langle k\rangle$, $\langle(\Delta k)^2\rangle$를 구하라.

(c) 확률 변수 x가 정규 분포 $N(\mu,\sigma^2)$를 따를 때, 즉 확률 분포 밀도 함수가

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, 평균과 분산, $\langle x\rangle$, $\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$ 을 구하라.

2. [2점]

(a) $x \sim B(16, 1/4)$인 경우, 확률 분포 $p(x)$을 막대 그래프로 나타내고, 평균과 표준 편차를 계산하여 그래프에 표시하여라.

(b) $x \sim N(4,3)$인 경우, 확률 밀도함수 $p(x)$의 그래프를, (a)의 그래프와 겹쳐서 나타내어라.

3. [2점] S대학 K군의 경우, 평균 3시간에 1번 문자 메시지를 받는다. K군이 하루 동안, 문자 메세지를 2번 이하로 받을 확률을 구하라.

4. [4점] Gamma 함수를 이용하여, $N \gg 1$인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

(a) Gamma 함수 $\Gamma(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{1}$$

임을 보여라.

(b) $\Gamma(1) = 1$임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^\infty t^N e^{-t} dt \end{aligned} \tag{2}$$

임을 보여라. 여기서 N 은 자연수이다.

(c) 식(2)의 피적분 함수 $F(t) = t^N e^{-t}$는 $t = N$에서 최대가 됨을 보이고 $\ln F(t) = N \ln t - t$를 $t = N$근처에서 전개하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \tag{3}$$

임을 보여라.

(d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^\infty N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}}\, d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}}\, d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \end{aligned} \tag{4}$$

임을 보여라.

5. [0점]

위키 피디아 (www.wikipedia.org)에서 다음 용어를 찾아 그 의미를 알아보자 (en.wikipedia.org/wiki/Main_Page 참조).

- statistical ensemble