

열 및 통계 물리 1 (Homework 3)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2004. 10. 27. 목요일 10:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 이후 제출한 것은 20% ~ 50%의 감점이 있습니다.

1. (a) 반지름 R 인 N -차원 구의 부피 $V_N(R)$ 이

$$V_N(R) = \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(\frac{N}{2})} R^N \quad (1)$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 Gamma 함수 $\Gamma(x)$ 는

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

로 정의된다.

(b) 식 (1)을 이용하여 1, 2, 3차원 구의 부피를 구하고 기존의 알려진 값과 일치함을 보여라.

2. 질량 m 인 자유 입자 3개가 길이 L 인 1차원 상자에 갇혀 있을 때, 계의 가능한 에너지는

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \\ &= (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) E_0 \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 E_0 는 $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ 이다.

(a) 에너지가 $E = 6E_0$ 인 계의 상태수를 구하라.

(b) 에너지가 $10E_0$ 보다 작은 계의 상태수를 구하라.

(c) $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 < n^2$ 를 만족하는 상태수는 $n_1 > 0, n_2 > 0, n_3 > 0$ 를 만족하면서 반지름 n 인 구 안에 있는 격자점의 갯수와 같으므로 n 이 큰 경우 대략적으로 $\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} n^3$ 으로 주어진다. 에너지가 E 와 $E + \delta E$ 사이에 있는 계의 상태수를 $E \gg E_0$ 인 경우 구하라.

3. 입자 하나는 3개의 양자 상태 $\epsilon, 0, -\epsilon$ 중 한 상태만 가질 수 있다. (서로 구분 가능한) 입자 다섯 개로 이루어진 계의 총 에너지가 E 일 때 상태 수를 $E = 0$ 와 $E = \epsilon$, 일 때, 각각 구하라.

4. 면적 $A = L \times L$ 인 2차원 평면속에서, 균일한 자기장 $\vec{B} = B\hat{x}$ 영향하에 운동하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \mu B \cos \theta \end{aligned}$$

로 주어진다. 이 경우, 입자의 고전적 상태는 입자의 위치와 운동량, 입자의 자기 모멘트 방향 θ 에 의해서 결정된다. 즉, 입자의 상태는 (x, y, p_x, p_y, θ) 에 의하여 기술된다. 에너지가 E 보다 작은 상태수 $\Sigma(E)$ 및 에너지가 $[E, E + \delta E]$ 사이에 있는 상태수 $\Omega(E)$ 를 구하여라. (여기서, θ 는 x -축과 자기 모멘트가 이루는 각으로 입자의 위치 (x, y) 와 독립적임을 유의하라.)

5. 교재 43쪽, 문제 3-1.