

열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2004. 9. 30. 목요일 10:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

1.  
(a) 확률 변수  $k$ 가 이항분포  $B(N, p)$ 를 따를 때, 즉
- $$k \sim B(N, p)$$
- 일 때, 확률 분포 함수  $p(k)$ 을 적고, 평균과 분산,  $\langle k \rangle$ ,  $\langle (\Delta k)^2 \rangle$ 를 구하라.
- (b) 확률 변수  $k$ 가 포아송분포  $P(\mu)$ 를 따를 때, 즉
- $$k \sim P(\mu)$$
- 일 때, 확률 분포 함수  $p(k)$ 을 적고, 평균과 분산,  $\langle k \rangle$ ,  $\langle (\Delta k)^2 \rangle$ 를 구하라.
- (c) 확률 변수  $x$ 가 정규 분포  $N(\mu, \sigma^2)$ 를 따를 때, 즉 확률 분포 밀도 함수가
- $$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
- 일 때, 평균과 분산,  $\langle x \rangle$ ,  $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ 을 구하라.
2.  
(a)  $x \sim B(16, 1/4)$ 인 경우, 확률 분포  $p(x)$ 을 막대 그래프로 나타내고, 평균과 표준 편차를 계산하여 그래프에 표시 하여라.
- (b)  $x \sim N(4, 3)$ 인 경우, 확률 밀도함수  $p(x)$ 의 그래프를, (a)의 그래프와 겹쳐서 나타내어라.
3. S대학 K군의 경우, 하루 평균 4번 문자 메시지를 받는다. K군이 하루 동안, 문자 메시지를 2번 이하로 받을 확률을 구하라.
4. 교재 17page부터 26page사이에 인쇄가 잘못되어 수식이 틀린 곳이 있다. 잘못된 식 번호를 모두 적고 바른 식으로 교정하라.

5. Gamma 함수를 이용하여,  $N \gg 1$ 인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

- (a) Gamma 함수  $\Gamma(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (1)$$

임을 보여라.

- (b)  $\Gamma(1) = 1$ 임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^\infty t^N e^{-t} dt \end{aligned} \quad (2)$$

임을 보여라. 여기서  $N$ 은 자연수이다.

- (c) 식(2)의 피적분 함수  $F(t) = t^N e^{-t}$ 는  $t = N$ 에서 최대가 됨을 보이고  $\ln F(t) = N \ln t - t$ 를  $t = N$ 근처에서 전개 하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \quad (3)$$

임을 보여라.

- (d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^\infty N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \end{aligned} \quad (4)$$

임을 보여라.