

열 및 통계 물리학 2 (Homework set 5)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2004. 6. 1. 화요일 10:00

자연과학대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에 는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부 만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 엄수 (제출시간 이후 것은 채점하지 않음)

1. [3점] 에너지 레벨이 $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = 2\epsilon$ 인 2 개의 state로 이루어진 계에 2개의 Boson입자가 놓여있다. 전체 계의 에너지 eigen states를 점유수 표현으로 나타내면 $|2, 0\rangle$, $|1, 1\rangle$, $|0, 2\rangle$ 이다. 온도 $T = \epsilon / \ln 4$ 인 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때,

(a) 분배함수 Z 를 구하고 $\{|2, 0\rangle, |1, 1\rangle, |0, 2\rangle\}$ 를 기저로 하여 밀도 행렬을 구하라.

(b) ϵ_1 state와 ϵ_2 state의 평균 점유수 n_1, n_2 를 구하여라.

(c) 에너지 레벨의 갯수가 많고, 전체 입자 수 N 인 큰 경우, (a,b)의 Canonical Ensemble 방법으로 평균 점유수 n_k 를 구하는 것은 쉽지 않다. 이럴 때는, 화학 퍼텐셜 μ 인 보존 입자 환경과 평형 상태에 있는 Grand Canonical Ensemble로 기술하여 평균 점유수 $\langle n_k \rangle$

$$\langle n_k \rangle = 1/[e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1] \quad (1)$$

를 얻게 되는데 μ 는 전체 평균 입자 수가 N 이 되도록 정하여 준다. 이 방법을 여기서와 같이 입자 수가 작은 계에 사용할 경우의 오차를 구하여 보자. 먼저 전체 입자수 $N = 2$ 를 만족하는 $z^{-1} = e^{-\beta\mu}$ 를 구하여 식 (1)로부터 $\langle n_1 \rangle$ 과 $\langle n_2 \rangle$ 를 계산하고 (b)의 결과와 비교하라.

2. [예습: 3점], 보즈-아인슈타인 적분

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}$$

이 $\sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^n}$ 임을 보이고 $n = 1$, $n = 1$, $n = 3/2$, $n = 5/2$ 에 대하여 $g_n(z)$ 의 대략적 그래프를 그려라.

3. [예습: 2점] Photon은 입자수가 보존되지 않는 보즈 입자 계로 생각할 수 있다. 즉, 화학 퍼텐셜이 항상 $\mu = 0$ 인 보즈 입자로 생각할 수 있다. 빛의 에너지 고유값이

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar k}{c}$$

로 주어짐을 이용하여 흑체 복사의 총 에너지 밀도 $u(T)$ 가

$$u(T) = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} T^4$$

로 주어짐을 보여라.

4. [예습: 2점] 교재 178page 식 (10-5)로부터 179page 식 (10-52)를 유도하라.