

열 및 통계 물리학 2 (Homework set 4)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2004. 5. 4. 화요일 10:00

자연과학대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에
는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부
만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 제출시간 이후 일주일 간은 30%의 감점이 있습니다.

1. 구분 불가능한 N 개의 단원자로 이루어진 기체가 조화 진
동자 포텐셜 안에 있다. 이 경우 Hamiltonian, H 는 다음과
같이 주어진다.

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_{\alpha,i}^2 \right). \quad (1)$$

여기서 $r_{\alpha,i}$ 와 $p_{\alpha,i}$ 는 α ($\alpha = 1, \dots, N$) 번째 입자의 좌표와
운동량의 i ($i = x, y, z$) 성분을 각각 나타내고 m 은 입자의
질량이고 $m\omega^2$ 는 조화 진동자 용수철 상수이다.

(a) 절대온도 T 인 저장실(reservoir)과 열적 평형상태를 이룰
때, 고전적 분배함수(partition function)가 $Z(T, \omega, N)$ 이

$$Z(T, \omega, N) = \frac{1}{N!} \left[\frac{T}{\hbar \omega} \right]^{3N} \quad (2)$$

로 주어짐을 보여라.

(b) Helmholtz 자유에너지는 $F = -T \ln Z$ 로 주어진다. 화
학 포텐셜(chemical potential) $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ 가

$$\mu = T \left[\ln N - 3 \ln \frac{T}{\hbar \omega} \right] \quad (3)$$

로 주어짐을 보여라.

(c) Potential밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 계의 입자 수
평균은 저장실의 화학 포텐셜에 의해 조정되고, 대분배
함수 $Z_G = \sum_N \zeta^N Z(T, \omega, N)$ 을 고려하여 구할 수 있다.
여기서 $\zeta = e^{\beta \mu}$ 임. 화학 포텐셜 μ , 온도 T 를 갖는 저장실
과 평형상태를 이루고 있을 때 대분배 함수 Z_G 와 평균 입
자수 $\langle N \rangle$ 를 구하라. 이로부터 μ 를 $\langle N \rangle, \omega, T$ 의 함수로 표
시하면, (b)와 같은 결과가 됨을 보여라.

(d) f -차원의 조화 진동자의 가능한 에너지 값을 양자역학적
으로 계산하면 $|n_1, \dots, n_f\rangle$ 상태의 에너지는

$$E(n_1, \dots, n_f) = \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(n_f + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar \omega$$

로 주어진다. $f = 3N$ 인 경우 분배 함수를 계산하고 어떤
극한에서 식 (2)의 고전 분배 함수가 되는지 밝혀라.

2.

(a) 온도 T 인 열원과 평형상태에 있는 단원자 이상 기체가
부피 V 인 3-차원 상자속에 있을 때, 분배함수 Z 가

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

로 주어짐을 보이고 자유에너지 $F(V, N, T)$ 를 구하여라.
여기서 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m T}}$ 이다.

(b) 면적 A 인 결정체의 표면에 흡착된 원자의 운동을 2차원
이상기체 운동으로 가정하면, 계의 Hamiltonian은

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \left(\sum_{i=1}^2 \frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} - \epsilon_a \right)$$

로 주어진다. 여기서 ϵ_a 는 흡착에너지이다. 표면의 온도
가 T 이고 표면에 N_s 개의 흡착 원자가 있을 때, 바른틀 양
상블을 이용하여 자유 에너지 $F_s(A, N_s, T)$ 를 구하여라

(c) (a)에서 고려한 원자 밀도 $n = N/V$ 인 이상기체 속에
(b)의 결정체를 넣었다. 평형상태에 있을 때, 결정체 표면
의 원자 밀도 $n_s = N_s/A$ 를 상자속의 원자 밀도 n 의 함
수로 구하여라. (힌트: 평형 상태시, 두 계의 화학 퍼텐셜
 $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ 와 $\mu_s = \frac{\partial F_s}{\partial N_s}$ 가 같음을 이용하라.)

3. (a) z -방향의 스핀 up 상태 $|\uparrow_z\rangle$ 와 x -방향의 스핀 up
상태 $|\uparrow_x\rangle$ 를 z -방향의 스핀 고유상태(eigen state)를 기
저(basis)로 하여 행벡터로 표현하여라.

(b) x -방향의 스핀 up 상태 $|\uparrow_x\rangle$ 60%와 x -방향의 스핀 down
상태 $|\downarrow_x\rangle$ 40%가 섞여있는 혼합(mixed) 상태를 z -방향
의 스핀 고유상태(eigen state)를 기저(basis)로 하여 행렬
로 나타내고 s_x 및 s_z 의 기대값을 구하라.

(c) 스핀이

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |\uparrow_x\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |\downarrow_x\rangle$$

인 상태에 놓여있다. z -방향의 스핀 고유상태(eigen
state)를 기저(basis)로 하여 행렬로 나타내고 s_x 및 s_z 의
기대값을 구하라.

4. 교재 165쪽, 문제 9-1.

5. 교재 165쪽, 문제 9-2.