

열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2003. 10. 1. 화요일 14:00

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 1.
- (a) 확률 변수 k 가 이항분포 $B(N, p)$ 를 따를 때, 즉
- $$k \sim B(N, p)$$
- 일 때, 확률 분포 함수 $p(n)$ 을 적고, 평균과 분산, $\langle k \rangle$, $\langle (\Delta k)^2 \rangle$ 를 구하라.
- (b) 확률 변수 x 가 정규 분포 $N(\mu, \sigma^2)$ 를 따를 때, 즉 확률 분포 밀도 함수가
- $$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
- 일 때, 평균과 분산, $\langle x \rangle$, $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ 을 구하라.
- (c) $k \sim B(16, 3/4)$ 인 경우, 확률 분포함수를 $p(k)$ 을 그래프로 나타내고, 평균과 표준 편차를 계산하여 그래프에 표시하여야.
- (d) $x \sim N(9, 3)$ 인 경우, 확률 분포함수를 $p(x)$ 의 그래프를, (c)의 그래프와 겹쳐서 나타내어라.
2. 원점에 서있는 김선수가 동전을 던져 앞 면이 나오면 +방향으로 뒷 면이 나오면 -방향으로 한 번에 보폭 a 만큼 움직이는 일차원 random walk을 한다.
- (a) 동전을 N 번 던질 때, 앞 면의 수 n_1 은 이항분포를 따른다 $[n_1 \sim B(N, \frac{1}{2})]$. 동전을 8 번 던졌을 때 앞 면이 다섯 번 나올 확률을 구하여야.
- (b) N 번 던져 앞 면이 n_1 번 나왔을 때, 김선수의 위치를 $x = la$ 로 표시할 때, l 을 N, n_1 의 함수로 구하여야
- (c) 동전을 8번 던졌을 때, 김선수가 $x = -2a$ 에 있을 확률을 구하여야
- (d) K군이 동전을 100번 던질 때 RMS 변위, $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ 를 구하여야.
3. 교재 16쪽, 문제 1-8.
4. S대학 K군의 경우, 하루 평균 10 번 문자 메시지를 받는다. K군이 하루 동안, 문자 메시지를 세 통 이하로 받을 확률을 구하라.

5. Gamma 함수를 이용하여, $N \gg 1$ 인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

- (a) Gamma 함수 $\Gamma(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (1)$$

임을 보여라.

- (b) $\Gamma(1) = 1$ 임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^\infty t^N e^{-t} dt \end{aligned} \quad (2)$$

임을 보여라. 여기서 N 은 자연수이다.

- (c) 식(2)의 피적분 함수 $F(t) = t^N e^{-t}$ 는 $t = N$ 에서 최대가 됨을 보이고 $\ln F(t) = N \ln t - t$ 를 $t = N$ 근처에서 전개하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \quad (3)$$

임을 보여라.

- (d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^\infty N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \end{aligned} \quad (4)$$

임을 보여라.