

열 및 통계 물리 1 (Homework 2)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2002. 10. 24. 목요일 오전 11 시

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

1. 반지름 R 인 N 차원 구의 표면적 $A_N(R)$ 이

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} R^{N-1}$$

임을 보여라.

2. λ 대학 γ 군은 문자 메시지를 평균적으로 하루에 4통 받는다.

(a) γ 군이 하루에 k 통의 문자 메시지를 받을 확률 $p(k)$ 가

$$p(k) = e^{-4} \frac{4^k}{k!}$$

임을 보여라. 윗 식을 유도하기 위해 가정한 것은 무엇인가?

(b) γ 군이 한 통의 문자 메시지도 받지 못하는 날은 일 년에 평균적으로 몇 일인가?

3. 87°C (360K)의 물 10g 을 27°C 의 열저장고 (heat reservoir)과 접촉시켜서 준정적과정으로 물의 온도를 27°C 로 내렸다.

(a) 준정적과정에서는

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (1)$$

를 만족한다. 27°C 에서 87°C 까지에서 정적 비열 C_V 가 일정하다고 가정하고, 물로 흘러들어오는 열 dQ_w 가

$$dQ_w = C_V dT$$

임을 이용하여 물의 엔트로피 변화량을 구하라.

(b) 열저장고는 정의에 의해 온도가 일정하게 유지된다. 열저장고의 엔트로피 변화량 ΔS_R 는 식 (1)로부터,

$$\begin{aligned} \Delta S_R &= \int_i^f dS_R \\ &= \int_i^f \frac{dQ_R}{T_R} \\ &= \frac{1}{T_R} \int_i^f dQ_R \\ &= \frac{Q_R}{T_R} \end{aligned}$$

로 주어지고 $Q_R = -Q_W$ 로부터 구할 수 있다. 열저장고의 엔트로피 변화량을 구하고, 열저장고와 물로 이루어진 전체 계의 엔트로피 변화량을 구하라.

(c) 같은 양 (10g)의 87°C 물을 먼저 57°C 열저장고와 접촉시켜서 물의 온도를 57°C 로 준정적으로 내린 다음 27°C 의 열저장고와 접촉시켜서 물의 온도를 27°C 로 다시 준정적으로 내린 경우의 전체 엔트로피 변화량을 구하라.

(d) 87°C 의 물을 27°C 의 물로 만들려고 한다. 어떻게 식히면, (물 + 열저장고)의 전체 계의 엔트로피 증가량을 최소화 할 수 있겠는가?

4. [20점] 이차원 조화 진동자의 Hamiltonian은

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$$

로 주어진다. 이 계의 에너지가 E 보다 작은 계의 고전적 상태수

$$\Omega = \frac{1}{h^2} \int_{H(x,y,p_x,p_y) < E} dx dy dp_x dp_y$$

를 구하고 양자 역학적 예측과 거의 일치함을 보여라.

5. 한 변의 길이가 L 인 정육면체의 상자 안에 상호작용하지 않는 양자역학적 입자들이 들어있다. 한 입자의 양자역학적 에너지 준위는

$$\epsilon(n_1, n_2, n_3) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

로 주어진다. 어떤 순간에 에너지 준위 $\epsilon(n_1, n_2, n_3)$ 를 갖는 입자수가 $f(n_1, n_2, n_3)$ 개라면, 이 때의 입자수 N 과 내부에너지 U 는 각각

$$N = \sum_{n_1, n_2, n_3} f(n_1, n_2, n_3)$$

$$U = \sum_{n_1, n_2, n_3} f(n_1, n_2, n_3) \epsilon(n_1, n_2, n_3)$$

로 주어진다. 만약, 각 변의 길이가 dL 만큼 준정적으로 증가하면 $f(n_1, n_2, n_3)$ 는 변화하지 않는다. 이 경우 U 의 변화 dU 는

$$\begin{aligned} dU &= -dW \\ &= -P dV \end{aligned}$$

로 주어진다. 이 식과 $V = L^3$ 으로부터

$$PV = \frac{2}{3} U$$

임을 보여라.