열 및 통계 물리 1 (Homework 1)

출제교수명: 정형채 제출일자: 2002. 9. 17. 화요일 오전 10 시

자연과학 대학 학과 학년 학번: 성명:

1.

(a) 확률 변수 k가 이항분포 $B(N,p)$를 따를 때, 즉

$$k \sim B(N,p)$$

일 때, 확률 분포 함수 $p(n)$을 적고, 평균과 분산, $\langle k \rangle$, $\langle (\Delta k)^2 \rangle$를 구하라.

(b) 확률 변수 x가 정규 분포 $N(\mu, \sigma_x^2)$를 따를 때, 즉 확률 분포 밀도 함수가

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, 평균과 분산, $\langle x \rangle$, $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ 을 구하라.

(c) $k \sim B(16, 1/2)$인 경우, 확률 분포함수를 $p(k)$을 그래프로 나타내고, 평균과 표준 편차를 계산하여 그래프에 표시하여라.

(d) $x \sim N(8,4)$인 경우, 확률 분포함수를 $p(x)$의 그래프를, (c)의 그래프와 겹쳐서 나타내어라.

2. 원점에 서있는 김선수가 동전을 던져 앞 면이 나오면 +방향으로 뒷 면이 나오면 −방향으로 한 번에 보폭 a만큼 움직이는 일차원 random walk을 한다.

(a) 동전을 N번 던질 때, 앞 면의 수 n_1은 이항분포를 따른다 $[n_1 \sim B\left(N, \frac{1}{2}\right)]$. 동전을 열 번 던졌을 때 앞 면이 다섯 번 나올 확률을 구하여라.

(b) N번 던저 앞 면이 n_1번 나왔을 때, 김선수의 위치를 $x = la$로 표시할 때, l을 N, n_1의 함수로 구하여라

(c) 동전을 10번 던졌을 때, 김선수가 $x = -2a$에 있을 확률을 구하여라

(d) K군이 동전을 100번 던질 때 RMS 변위, $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ 를 구하여라.

3. 교재 16쪽, 문제 1-8.

4. S대학 K양의 경우, 평균 한 달에 한 번 경마장에 간다. K양이 지난 세 달 동안, 경마장에 세 번 갔을 확률과 한 번도 안 갔을 확률을 구하라.

(참조: K양이 세 달 동안 경마장에 간 횟수 n은 포아송 분포, $n \sim P(\mu)$ 를 따른다. 여기서 μ는 n의 평균값이다.)

5. Gamma 함수를 이용하여, $N \gg 1$인 경우,

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

(a) Gamma 함수 $\Gamma(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{1}$$

임을 보여라.

(b) $\Gamma(1) = 1$임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^\infty t^N e^{-t} dt \qquad (2) \end{aligned}$$

임을 보여라. 여기서 N 은 자연수이다.

(c) 식(2)의 피적분 함수 $F(t) = t^N e^{-t}$는 $t = N$에서 최대가 됨을 보이고 $\ln F(t) = N \ln t - t$를 $t = N$근처에서 전개하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \tag{3}$$

임을 보여라.

(d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^{\infty} N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \qquad (4) \end{aligned}$$

임을 보여라.