

열 및 통계 물리 2 (Homework set 6)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2002. 6. 11. 화요일 오후 3 시

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 마감시간 이 후 제출한 것은 20% ~ 50%의 감점이 있음

1. [3점] 스핀 1/2인 입자의 z방향 스핀 연산자 s_z 의 고유치는 $\lambda_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2}$ 이다. λ_+ 에 해당하는 고유 상태를 $|\uparrow_z\rangle$, λ_- 에 해당하는 고유 상태를 $|\downarrow_z\rangle$ 라 할 때, s_x 와 s_y 의 고유 상태는

$$\begin{aligned} |\uparrow_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle) \\ |\downarrow_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle) \\ |\uparrow_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + i|\downarrow_z\rangle) \\ |\downarrow_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle - i|\downarrow_z\rangle) \end{aligned} \quad (1)$$

로 주어진다.

(a) $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ 를 기저로하여 고유상태 $|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle, |\uparrow_y\rangle, |\downarrow_y\rangle, |\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle$ 를 열벡터로 나타내어라. 일반적으로 $\{|\alpha\rangle\}$ 기저 표현에서 state ket $|V\rangle$ 의 열벡터 표현 \vec{V} 의 α 성분 V_α 는 $\langle\alpha|V\rangle$ 로 주어진다. 또, $\langle\uparrow_x|, \langle\downarrow_x|, \langle\uparrow_y|, \langle\downarrow_y|, \langle\uparrow_z|, \langle\downarrow_z|$ 를 행벡터로 나타내어라. (참조: $\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger$ 로 정의된다.)

(b) 스핀이 고유상태 $|\psi\rangle$ 에 있을 때, 밀도 행렬 연산자 ρ 는

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

로 주어진다.

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\uparrow_z\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\downarrow_z\rangle$$

일 때, $|\psi\rangle, \langle\psi|, \rho$ 를 $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ 를 기저로하여 나타내어라. (참조: 일반적으로 $\{|\alpha\rangle\}$ 기저 표현에서 연산자 A의 α, β 성분 $A_{\alpha, \beta}$ 는 $\langle\alpha|A|\beta\rangle$ 로 주어진다.)

(c) 어떤 연산자 A의 고유치의 집합이 $\{\lambda_\alpha\}$, 그에 해당하는 고유 상태 집합이 $\{|\lambda_\alpha\rangle\}$ 로 주어진 경우, 연산자 A는

$$A = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\lambda_{\alpha}\rangle\langle\lambda_{\alpha}|$$

로 주어진다. 식(1)을 이용하여 스핀 연산자 s_x, s_y, s_z 를 $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ 를 기저로하여 행렬 표현하고

$$s_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$$

임을 보여라. 여기서 σ_i 는 파울리 행렬로

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이다.

2. [3점] 1번 문제 (a),(b)를 $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ 를 기저로하여 표현하여라. (c)번의 스핀 연산자 s_i 를 $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ 를 기저로 표현하여라.

3. [4점] 스핀 1/2인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$\begin{aligned} |\Psi_{AB}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} |\uparrow_z\rangle_A (|\uparrow_z\rangle_B + \sqrt{3}|\downarrow_z\rangle_B) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} |\downarrow_z\rangle_A (\sqrt{3}|\uparrow_z\rangle_B + |\downarrow_z\rangle_B) \end{aligned}$$

로 기술되는 pure 상태에 있다.

(a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 행렬 ρ_{AB} 을 $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ 를 기저로하여 나타내어라. 여기서 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 는 $|\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B$ 를 나타낸다.

(b) $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ 를 구하고 그 의미를 말하라.

(c) $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ 를 구하고 그 의미를 말하라.