

열 및 통계 물리 2 (Homework set 4)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2002. 5. 21. 화요일 오후 3 시

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

- 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.
- 마감시간 이 후 제출한 것은 20% ~ 50%의 감점이 있음

1. [2점] 갖을 수 있는 전체 미시 상태수가  $M$ 개인 어떤 계가 있다. 이 중,  $s$ 상태에 있을 때, 거시 변수  $x$ 와  $y$ 의 값이 각각  $x_s, y_s$ 이다. 이들의 평균값이 각각  $x_0, y_0$ 라 할 때, 최대 엔트로피를 주는 확률 분포  $p_s$ 의 형태를 구하라. 또 이때의 엔트로피가

$$S = \beta x_0 + \gamma y_0 + \ln \Xi$$

임을 보여라. 여기서  $\beta, \gamma$ 는 라그랑지의 미정계수이고

$$\Xi := \sum_{s=1}^M e^{-\beta x_s - \gamma y_s}$$

이다.

2. [3점]  $N$ 개의 단원자로 이루어진 기체가 Potential  $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\kappa r^2 = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + y^2 + z^2)$ 안에 있다. 이 경우 Hamiltonian,  $H$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{p_{i,\alpha}^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2}\kappa x_{i,\alpha}^2.$$

여기서  $x_{i,\alpha}$ 와  $p_{i,\alpha}$ 는  $i(i=1, \dots, N)$ 번째 입자의 좌표와 운동량의  $\alpha(\alpha=x, y, z)$ 성분을 각각 나타내고  $m$ 은 입자의 질량이다.

(a) 절대온도  $T$ 인 저장실(reservoir)과 열적 평형상태를 이룰 때, 고전적 분배함수(partition function)가

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left[ \frac{T}{\hbar \sqrt{\kappa/m}} \right]^{3N}$$

으로 주어짐을 보여라.

(b) Helmholtz 자유에너지는  $F = -T \ln Z$ 로 주어진다. 화학 포텐셜(chemical potential)  $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ 가

$$\mu = T \left[ \ln N + 3 \ln \frac{\hbar \sqrt{\kappa/m}}{T} \right]$$

로 주어짐을 보여라.

(c) Potential밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 계의 입자 수 평균은 저장실의 화학 포텐셜에 의해 조정되고, Grand Partition function  $\Xi = \sum_N \zeta^N Z_N$ 을 고려하여 구할 수 있다. 화학 포텐셜  $\mu$ , 온도  $T$ 를 갖는 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때, 입자 수 평균  $N$ 을

$$N = \zeta \frac{\partial [\ln \Xi]}{\partial \zeta}$$

로부터 구하라. 여기서  $\zeta = e^{\beta \mu}$ 임. 이로부터  $\mu$ 를  $\kappa, N, T$ 의 함수로 표시하면, (b)와 같은 결과가 됨을 보여라.

3. [2점] 큰 바른틀 앙상블을 이용하여 이상기체의 상태 방정식을 구하라.

4. [3점]

(a) 단원자 이상 기체가 온도  $T$ , 압력  $p$ 인 상태에 있다. 이 기체의 화학 포텐셜  $\mu$ 를 구하라.

(b) 이 기체 속에 원자가 흡착될 수 있는 격자 수가  $N$ 개인 결정체의 표면이 노출되어 있다. 표면에 흡착된 원자를 떼어내는데 필요한 흡착에너지는  $\epsilon_a$ 이다. 즉 기체 속의 원자보다 흡착된 원자의 에너지가  $\epsilon_a$  만큼 작다. 평형 상태에 있을 때, 흡착된 원자수  $N_a$ 는

$$N_a = \frac{N}{1 + e^{-\beta(\epsilon_a + \mu)}}$$

임을 보여라.