

열 및 통계 물리 2 (Homework set 3)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2002. 5. 7. 화요일 오후 3 시

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

○ 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.

○ 마감시간 이 후 제출한 것은 20% ~ 50%의 감점이 있음

1. [4점] 서로 구별할 수 있는 N 개의 3차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도 T 인 열원과 평형상태에 있다. 조화 진동자 계의 해밀토니안은

$$\begin{aligned}
 H(\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k \vec{q}_i^2 + \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{q}_i^2 + \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \quad (1)
 \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 $k = m\omega^2$ 는 용수철 상수이다.

- (a) 분배함수 $Z_N(T)$ 를 구하라.
- (b) 평균 에너지 $\langle E \rangle$ 와 비열 $C(T) = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$ 를 구하라.
- (c) Helmholtz 자유에너지 $F = -T \log Z$ 를 구하고 $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ 로 부터 엔트로피를 구하라.
- (d) i -번째 입자의 원점으로 부터의 평균거리 $R_i = \sqrt{\langle \vec{q}_i^2 \rangle}$ 를 구하라.

2. [4점] 해밀토니안이 식 (1)로 주어지는 서로 구별할 수 있는 N 개의 3차원 조화 진동자로 이루어진 계의 열통계적 성질을 작은 바른틀 앙상블 (Micro Canonical Ensemble)을 이용하여 살펴보려고 한다.

(a) 계의 에너지가 $E \sim E + \Delta E$ 에 있는 상태수 $\Omega(\omega, E, N)$ 가

$$\Omega(\omega, E, N) = \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^{3N} \left(\frac{3N\Delta E}{E} \right)$$

임을 보여라.

(b) 이 계의 엔트로피 $S(\omega, E, N)$ 가

$$S(\omega, E, N) = 3N \left[1 + \ln \left(\frac{E}{3N\hbar\omega} \right) \right]$$

임을 보여라.

(c) 작은 바른틀 앙상블의 온도 정의를 적고 이를 이용하여

$$E = 3NT$$

임을 보여라.

(d) 문제 1(d)의 결과로 부터 이 계의 유효 부피 \tilde{V} 를 ω 의 함수로 구하라. 또, 엔트로피를 고정하고 \tilde{V} 를 변화 시킬때의 에너지의 변화로 유효 압력 \tilde{p} 를 다음과 같이

$$\tilde{p} := - \left(\frac{\partial E}{\partial \tilde{V}} \right)_S$$

정의할 때,

$$\tilde{p} \tilde{V} = NT$$

이 되는지 확인하여라.

3. [2점] f -차원의 조화 진동자의 가능한 에너지 값을 양자역학적으로 계산하면 $|n_1, \dots, n_f\rangle$ 상태의 에너지는

$$E(n_1, \dots, n_f) = \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(n_f + \frac{1}{2} \right) \right]$$

로 주어진다. $f = 3N$ 인 경우 분배 함수를 계산하고 어떤 극한에서 1번 (a) 에서 구한 고전 분배 함수가 되는지 밝혀라.