

열 및 통계 물리 1 (Homework set 4)

출제교수명: 정형채

제출일자: 2001. 11. 26. 월요일 오후 2 시

자연과학 대학

학과

학년

학번:

성명:

○ 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.

1. [4점] Gamma 함수를 이용하여

$$\ln[N!] \approx N \ln N - N$$

임을 보이려고 한다.

(a) Gamma 함수 $\Gamma(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(x-1)} dt$$

부분적분을 이용하여

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (1)$$

임을 보여라.

(b) $\Gamma(1) = 1$ 임을 보이고 이 사실과 식 (1)을 이용하여

$$\Gamma(N) = (N-1)!$$

즉

$$\begin{aligned} N! &= \Gamma(N+1) \\ &= \int_0^{\infty} t^N e^{-t} dt \end{aligned} \quad (2)$$

임을 보여라. 여기서 N 은 자연수이다.

(c) 식(2)의 피적분 함수 $F(t) = t^N e^{-t}$ 는 $t = N$ 에서 최대가 됨을 보이고 $\ln F(t) = N \ln t - t$ 를 $t = N$ 근처에서 전개하여,

$$F(N+\epsilon) \approx N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} \quad (3)$$

임을 보여라.

(d) 식(2,3)를 이용하여

$$\begin{aligned} N! &\approx \int_{-N}^{\infty} N^N e^{-N} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &\approx N^N e^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon^2}{2N}} d\epsilon \\ &= \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \\ \ln N! &\approx N \ln N - N \end{aligned} \quad (4)$$

임을 보여라.

2. [3점] 스핀 $\frac{1}{2}$, 자기모멘트 μ 인 입자 N 개가 외부 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$ 안에 놓여있다. 입자끼리의 상호작용이 존재하지 않아 계의 해밀토니안은

$$H = -B\mu \sum_{\alpha=1}^N s_{\alpha}^z$$

로 주어진다. 여기서 s_{α}^z 는 ± 1 이다. 즉, 자기장방향의 자기모멘트를 갖는 입자수가 n_1 이고 반대 방향의 자기모멘트를 갖는 입자수가 n_2 이라면 (with $n_1 + n_2 = N$) 계의 에너지는

$$E = -(n_1 - n_2)\mu B$$

로 주어진다.

(a) 계의 에너지가 $[E, E+dE]$ 구간에 있는 총 상태수 $\Omega(E)$ 를 구하라.

(b) 1번의 식(4)를 이용하여 $\ln \Omega(E)$ 를 구하라.

(c) 절대 온도 T 와 에너지 E 의 관계식을 구하라.

3. [3점] Problem 4-1 of Reif in page 150.