열 및 통계 물리 1 (Homework set 3)

출제교수명: 정형채 제출일자: 2001. 11. 12. 월요일 오후 2 시

자연과학 대학 학과 학년 학번: 성명:

○ 문제지에 직접 답을 쓰지 말고 다른 종이에 풀어서 문제지를 표지로 하여 함께 철하여 제출하세요. 문제지에는 풀이 여부만 표시하세요. 완전히 푼 문제는 O표, 일부만 푼 문제는 삼각형, 안 푼 문제는 X표로 표시하세요.

1. [2점] 각 변의 길이가 L_x, L_y, L_z인 상자 속에 단 원자 입자가 하나 들어 있다. 이 경우 에너지 준위는

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \tag{1}$$

로 주어진다.

(a) 입자가 (n_x, n_y, n_z) 상태에 놓여있는 경우 x-축에 수직한 면에 작용하는 힘 F_x가

$$F_x = \frac{\hbar^2\pi^2}{m}\frac{n_x^2}{L_x^3}$$

로 주어짐을 보여라.

(b) 위의 경우 압력 p는

$$p = \frac{\hbar^2\pi^2}{m}\frac{n_x^2}{L_x^3 L_y L_z} \tag{2}$$

로 주어짐을 보여라.

(c) 세변의 길이가 같은 경우 $(L_x = L_y = L_z = L)$, $\langle n_x^2\rangle = \langle n_y^2\rangle = \langle n_z^2\rangle$ 로 가정한다. 이 경우, 평균 압력 $\bar{p}$가 $\bar{p} = 2\bar{E}/3V$로 주어짐을 식(1),(2)를 이용하여 보여라.

2. [4점] 고립계 $A+B$의 에너지 E_0는 보존된다. 즉, A계의 에너지를 E_A, B계의 에너지를 E_B라 할 때

$$E_A + E_B = E_0$$

를 항상 만족한다. A계가 에너지 U를 가질 확률은 $P_A(U)$는 상태 수 $\Omega_0(U) = \Omega_A(U)\Omega_B(E_0 - U)$에 비례하므로

$$\begin{aligned} P_A(U) &= C\,\Omega_A(U)\Omega_B(E_0 - U) \\ &= C\,e^{S_0(U)} \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 C는 상수이고 전체 엔트로피 $S_0(U)$는

$$S_0(U) = \ln\Omega_0(U) = \ln\Omega_A(U) + \ln\Omega_B(E_0 - U)$$

이다. (여기서 볼츠만 상수 $k_B = 1$)

(a) $S_0(U)$를 $\tilde{U}$근처에서 전계하여

$$S_0(U) = S_0(\tilde{U}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 S_0}{\partial U^2}\right|_{\tilde{U}}(\Delta U)^2 + O\Big((\Delta U)^3\Big)$$

임을 보여라. 여기서 $\Delta U = U - \tilde{U}$이고 $\Omega_0(U)$는 $U = \tilde{U}$에서 최대값을 갖는다.

(b) B계가 열 저장고 (thermal reservior) 일 때, T_B는 일정하므로 $\frac{\partial T_B}{\partial U} = 0$이다. 이 사실과

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\partial S_A}{\partial U} + \frac{\partial S_B}{\partial U}\right)$$

임을 이용하여 $O\Big((\Delta U)^3\Big)$ 항을 무시할 때

$$S_0(U) = S_0(\tilde{U}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right](\Delta U)^2 \tag{3}$$

임을 보여라.

(c) 이상 기체의 경우에서 살펴 본 바와 같이, 대부분의 경우 자유도가 f인 계의 상태수 $\Omega(E)$는

$$\Omega(E) \propto E^{f/2}$$

로 주어진다. 이로 부터 A계의 에너지가 U일 때, A계의 온도 T_A는

$$\frac{1}{T_A} = \frac{f}{2U} \tag{4}$$

임을 보여라.

(d) 식(3)(4)로부터

$$S_0(U) = S_0(\tilde{U}) - \frac{f}{4\tilde{U}^2}(\Delta U)^2$$

임을 보여라.

(e) A계가 에너지 U를 가질 확률 $P_A(U)$는 $P_A(U) \propto e^{S_0(U)}$임을 이용하여

$$P_A(U) = (const.)e^{-\frac{(\Delta U)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 $\sigma = \sqrt{\frac{2}{f}}\,\tilde{U}$임을 보여라.

(f) 에너지 U를 가질 확률 $P_A(U)$가 식(5)으로 주어지는 경우 A계의 평균에너지 $\bar{U} = \tilde{U}$임을 보여라.

4. [2점] Problem 3-1 of Reif in page 126.

5. [2점] Problem 3-2 of Reif in page 127.