출제교수명: 시행일자: 1998. 6. 12. 금요일 4 교시

자연과학 대학 학과 학년, 학번: 성명:

1.[35점] N개의 단원자로 이루어진 기체가 Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\kappa r^2 = \frac{1}{2}\kappa(x^2+y^2+z^2)$안에 있다. 이경우 Hamiltonian, H는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{p_{i,\alpha}^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}\kappa\, x_{i,\alpha}^2.$$

여기서 $x_{i,\alpha}$ 와 $p_{i,\alpha}$는 $i(i=1,\ldots,N)$번째 입자의 좌표와 운동량의 $\alpha(\alpha=x,y,z)$성분을 각 각 나타내고 m은 입자의 질량이다.

(a)[15점] 절대온도 T인 저장실(reservoir)과 열적 평형상태를 이룰 때, 고전적 분배함수(partition function)가

$$Z_N = \frac{1}{N!}\left[\frac{2\pi T\sqrt{m/\kappa}}{h}\right]^{3N}$$

으로 주어짐을 보여라.

(b)[10점] Helmholtz 자유에너지는 $F = -k_B T\log Z$로 주어진다. 화학 포텐셜(chemical potential) $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$가

$$\mu = k_B T\left[\log N - 3\log\frac{2\pi T\sqrt{m/\kappa}}{h}\right]$$

로 주어짐을 보여라.

(c)[10점] Potential밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 계의 입자 수 평균은 저장실의 화학 포텐셜에 의해 조정되고, Grand Partition function $Q = \sum_N \zeta^N Z_N$을 고려하여 구할 수 있다. 화학 포텐셜 μ, 온도 T를 갖는 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때, 입자 수 평균 N을

$$N = \zeta\frac{\partial[\log Q]}{\partial\zeta}$$

로 부터 구하라. 여기서 $\zeta = e^{\beta\mu}$임. 이로부터 μ를 N, V, T의 함수로 표시하면, (b)와 같은 결과가 됨을 보여라.

2. [45점] 에너지 ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3를 갖는 3개의 state로 이루어진 계가 있다. 이 계에 2개의 Fermion입자가 놓여있고 온도 T인 저장실과 평형상태를 이루고 있다. $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = (\log 2)k_B T$, $\epsilon_3 = (\log 3)k_B T$인 경우를 생각하고 가능한 경우 최종 값은 숫자로 구하라.

(a)[15점] 두 개의 Fermion을 세 개의 states에 넣는 방법은 세 가지, $|n_1,n_2,n_3\rangle = |1,1,0\rangle$, $|1,0,1\rangle$, $|0,1,1\rangle$ 이다. 각 각의 경우 에너지를 적고, 분배함수 Z를 구하여라.

(b)[10점] $1,2,3$번째 states의 평균 입자 갯수 $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$를 구하여라.

(c) [10점] 입자의 갯수가 많은 Fermion 계의 경우, state r의 평균 갯수는 $n_r = 1/[e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}+1]$로 주어진다. 여기서 화학 포텐셜 μ는 $\sum_r n_r = N$으로 부터 구할 수 있다. 위와 같이 입자의 수가 작은 계에 이 방법을 사용할 경우 오차를 계산해보자. 먼저, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}-2=0$의 한 근이 $x \approx 27/100$임을 이용하여, $\zeta = e^{\beta\mu}$의 값을 구하여라.

(d)[10점] 평균 입자수 $n_r = 1/[e^{\beta(\epsilon_r-\mu)}+1]$를 구하고 (b)에서 구한 정확한 $\bar{n}_r$과 비교하라.

3.[30점] 많은 경우, 금속 속의 전자들은 Fermi gas로 기술될 수 있다. 즉, eigen stats가 $|\vec{k}, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|s\rangle$로 주어진다. 여기서 스핀 $s = \pm\frac{1}{2}\hbar$를 갖을 수 있고, $|\vec{k}, s\rangle$ state의 에너지는 (s상태에 무관하게) $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2 \,/\, 2m$로 주어진다.

(a)[10점] $|\vec{k}, s\rangle$ 상태의 평균 입자수

$$n_{\vec{k},s} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)} + 1}$$

로 주어진다. $\beta\mu \gg 1$일 때, $n(\epsilon_{\vec{k}})$의 대략적 형태를 그려라.

(b)[10점] $T = 0$에서의 Chemical Potential ϵ_{F}는

$$\epsilon_{F} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 m은 전자의 질량이고 $n = N/V$는 자유전자의 밀도이다.

(c)[10점] 금속에서의 Fermi 온도 $T_{F} = \epsilon_{F}/k_{B}$는 보통 $10^4 \sim 10^5 K$ 정도이다. 만약 어떤 금속의 T_{F}가 실온, 즉, $T_{F} \sim 300K$이라면, 이 금속의 자유 전자 밀도는 대략 얼마인가? 필요한 경우 $\hbar c = 1973 eV\text{Å}$, $mc^2 = 0.511 MeV$, $k_{B} = 1eV/11605K$임을 이용하라.

4.[30점] 다음중 2개 항목을 골라 간단히 설명하라.

(가) Fermi-Dirac 통계 / Bose-Einstein 통계

(나) Gibbs paradox

(다) Chemical potential

(라) Entropy

(마) 열적 종말

(바) 물리 계의 통계 물리적 기술 방법

필요시 다음공식을 이용하라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\, dx = \sqrt{\pi/a}$$

$$\log N! \approx N \log N - N$$