열 및 통계 물리 1 (기말 고사)

출제교수명: 정형채 시행일자: 2011. 12. 13. 화요일 13:30 – 14:45

자연과학 대학 학과 학년, 학번: 성명:

- 답지에 <u>정리된 풀이과정과 답을</u> 적은 후 제출할 것

1. [60점] 평형 통계 역학에서 나오는 세 가지 앙상블 방법 중 Micro Canonical Ensemble과 Canonical Ensemble에 대하여 설명하라. 특히, 각각의 앙상블이 원칙적으로 어떤 계에 적용될 수 있는지, 미시 상태 x에 있을 확률 $p(x)$는 어떻게 되는지, 계를 기술하는 열역학 함수 및 변수는 어떻게 구하는지 기술하라.

2. [60점] 온도 $T = 1/\beta$이고 자기장 $\vec{B}$인 환경에 자기 모멘트 $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$를 가지는 스핀-$\frac{1}{2}$인 전자가 정지해 있어, 해밀토니안이 $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$로 주어진다. z-방향은 자기장 방향으로 정하자. $\sigma_z \in \{1, -1\}$이다.

(a) 이 입자의 분배함수가

$$Z = C_1 \cosh(\beta\mu B)$$

로 주어짐을 보이고 C_1을 구하라.

(b) 이 입자의 평균 자기모멘트 $\langle\vec{\mu}\rangle$를 구하라.

(c) 위 입자 N개로 이루어진 계의 해밀토니안은, 자기 모멘트가 상호작용이 무시되는 경우, $H = -\sum_k \vec{\mu}^k \cdot \vec{B}$ 로 주어진다. 이 계의 자화율(magnetization) $M_z = \langle\sum_k \mu_z^k\rangle$을 구하라. 또, 감수율(susceptibility) χ이

$$\chi \equiv \lim_{B\to 0}\frac{\partial M_z}{\partial B} = \frac{C_2}{T}$$

로 주어짐을 보이고 C_2값 구하라.

(d) 자기 모멘트가 모든 방향을 연속적으로 가질 수 있는 고전적인 경우의 분배함수는 (a)에서 구한 분배함수가 어떻게 달라지는지 간단히 기술하라.

3. [60점] 단원자 이상기체를 내용물로 하는 어떤 가상의 기관이 다음 3가지 과정으로 이루어진 순환을 하고 있다.

과정		초기 상태	최종 상태	열
1	단열 팽창	(V_a, p_a)	(V_b, p_b)	Q_1
2	등압 수축	(V_b, p_b)	(V_c, p_c)	Q_2
3	등적 승압	(V_c, p_c)	(V_a, p_a)	Q_3

여기서 열(heat)은 기관이 받는 열이다. 즉 $Q > 0$이면 기관으로 열이 들어오는 것이고 $Q < 0$이면 열이 밖으로 나가는 것이다. 등압과 등적 조건에 의해 $V_c = V_a$이고 $p_c = p_b$이다. $V_b = 8V_a$인 경우, 다음 물음에 답하라.

(a) 위 기관의 싸이클을 p-V 그래프로 나타내고 이 기관이 싸이클 당 한 순수 일 W를 그래프에 빗금(hatching)으로 표시하여라.

(b) p_b, T_a, T_b, T_c를 p_a와 V_a의 함수로 구하라.

(c) Q_1, Q_2, Q_3를 p_a와 V_a의 함수로 구하라.

(d) 이 기관의 효율 $\eta = \frac{W}{Q_3}$를 구하라.

4. [60점] 부피 V인 상자 속에 서로 구분할 수 없는 N개의 입자로 이루어진 이상기체가 고립된 상태에 있다. 이 계의 해밀토니안은

$$H(\{q_i, p_i\}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{p}_i^2}{2m} & \text{for } \forall\vec{r}_i \in V \\ \infty & \text{otherwise}\end{cases}$$

로 주어진다.

(a) 이 계의 에너지가 U보다 작은 상태 수 $\Sigma(U)$를 구하라. 필요한 경우, 반지름 R인 f차원의 구의 부피 $V_{sp}(f;R)$이

$$V_{sp}(f;R) = \frac{\pi^{f/2}}{\frac{f}{2}!}R^f$$

로 주어짐을 이용하라.

(b) 이 계의 에너지가 U에서 $U + \delta U$ 사이에 있을 때, 엔트로피 $S = S(U, V, N; \delta U)$를 구하고 N이 충분히 클 때,

$$S = N\left[\ln\left(\frac{V}{N\lambda^3}\right) + C\right]$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C와 $\lambda(U, N)$를 구하라.

(c) (b)의 결과 및 $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}$을 이용하여 이상기체의 p, U, V 간의 관계식을 구하라.

5. [60점] 한 입자가 가질 수 있는 에너지 상태가 $\epsilon_0 = 0, \epsilon_1 = \epsilon$ 두 개인 계가 있다. 여기서 $\epsilon > 0$이다.

(a) 온도가 $T = \frac{1}{\beta}$인 환경과 평형상태에 있을 때, 한 개 입자의 분배함수 Z_1은

$$Z_1 = 1 + e^A$$

의 형태로 쓸 수 있음을 보이고 A를 β와 ϵ의 함수로 구하라.

(b) N개 입자로 이루어진 닫힌 계의 해밀토니안은 각각의 입자가 가지는 에너지의 합으로 주어진다. 입자간 구분이 가능할 때, $Z_N = Z_1^N$임을 이용하여 분배함수 $Z_N(\beta, \epsilon)$를 구하고 입자가 모두 ϵ_1상태이 있을 확률을 구하라.

(c) (b)에서 구한 분배함수 Z_N을 이용하여, 입자 N개로 이루어진 계의 평균에너지 $U = \langle E\rangle$를 구하고 입자 한 개 평균에너지의 N배임을 확인하여라.

(d) 고전적인 경우, N개 입자가 서로 구분 불가능할 때 분배함수는

$$Z_N^I(\beta, \epsilon) = \frac{1}{N!}Z_1^N \tag{1}$$

로 주어졌다. 하지만, 위 경우처럼 에너지 상태수가 유한한 경우, N이 무한히 커지는 극한에서 $\frac{1}{N!}Z_1^N$이 0이 되어 식(1)로 쓸 수 없다. 그 이유는 무엇인지 기술하라. (힌트:에너지 상태가 $\epsilon_0 = 0$인 하나의 상태만 가지는 계에 입자 2개를 넣는 경우를 고려해 볼 것.)