

# 열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2011. 10. 20. 목요일 13:30 - 14:45

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- 과제 3: 문제지는 가지고 가서 풀어 10월 25일 수업 전 제출

1. [50점] 열역학 큰퍼텐셜  $\Phi$ 는

$$\begin{aligned}\Phi &= F - \mu N \\ &= U - TS - \mu N\end{aligned}$$

으로 정의된다. 열역학 1법칙

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

을 이용,  $d\Phi$ 를 구하고  $\Phi$ 가 어떤 변수의 함수인지 밝혀라. 또, 압력  $p$ , 평균 입자수  $N$ , 엔트로피  $S$ 를  $\Phi$ 의 편미분 형태로 나타내라.

2. [70점] 어떤 입자가 퍼텐셜

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{for } y \in [0, L] \\ \infty & \text{for } y \notin [0, L] \end{cases}$$

속에서 2차원 운동을 하고 있다. 즉,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

로 주어지는 Hamiltonian을 가지고  $y \in [0, L]$ 에서 운동하고 있다. 에너지가  $U$ 보다 작은 상태수  $\Sigma(U)$  및 에너지가  $[U, U + \delta U]$  사이에 있는 상태수  $\Omega(U; \delta U)$ 를 구하여라. (필요한 경우  $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq 1$ 로 주어지는 타원체의 부피는  $V = \frac{4\pi}{3}abc$ 임을 이용하라.)

3. [80점] 단열된 진공 상자속에  $T_A = 87^\circ\text{C}$  (360K)의 물 10g이 들어있는 병 A와  $T_B = 27^\circ\text{C}$ 의 물 10g이 들어있는 병 B를 접촉시켜 놓았다. 두 병은 준정적과정으로 열을 교환하여 모두  $T_C = 57^\circ\text{C}$ 가 되었다. 필요한 경우,  $\ln(300) \approx 5.704$ ,  $\ln(330) \approx 5.799$ ,  $\ln(360) \approx 5.886$  임을 사용하라.

(a) 준정적과정에서는  $dQ = TdS$ 를 만족한다.  $27^\circ\text{C}$ 에서  $87^\circ\text{C}$ 까지에서 정적 비열  $c_v$ 가 일정하다고 가정하고 물 A의 엔트로피 변화  $\Delta S_A$ 와 물 B의 엔트로피 변화  $\Delta S_B$ 를 구하여라. 물의 단위 그램(g)당 비열  $c_v$ 는  $c_v \approx 4.18 \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}} \approx 2.6 \times 10^{19} \frac{\text{eV}}{\text{g}\cdot\text{K}} \approx 3.0 \times 10^{23} \frac{1}{\text{g}}$  임을 이용하라.

(b) A, B 물이 각각  $87^\circ\text{C}$ ,  $27^\circ\text{C}$  물로 있을 때의 총 상태수를  $\Omega_i$ 라 하고 둘 다  $57^\circ\text{C}$ 로 있을 때의 총 상태수를  $\Omega_f$ 라 할 때, 두 상태수의 비  $\frac{\Omega_i}{\Omega_f}$ 를 구하여라.

4. [100점] 동전 두 개로 이루어진 시스템 S가 동전  $N$ 로 이루어진 환경 R과 서로 상호작용하여 전체 동전  $N+2$ 개중 앞면의 수가  $mN$ 개로 유지된다. 여기서  $m$ 은 유리수로  $m \in \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N+2}{N}\}$  이다. 시스템 S가 가질수 있는 상태  $x$ 는  $x_1 = (\text{뒤}, \text{뒤})$ ,  $x_2 = (\text{뒤}, \text{앞})$ ,  $x_3 = (\text{앞}, \text{뒤})$ ,  $x_4 = (\text{앞}, \text{앞})$ 의 4가지이다. 각 상태에 있을 확률을  $p(x_i)$ 라 하자.

(a)  $N = 100$ ,  $m = 1/4$ 인 경우, 환경 R의 앞면 수가  $k$ 인 가지수  $\Omega_R(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!}$  임을 이용하여

$$r_2 = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} = 25/76$$

임을 보여라.

(b)  $N = 100$ ,  $m = 1/4$ 인 경우  $r_3 = \frac{p(x_3)}{p(x_1)}$ ,  $r_4 = \frac{p(x_4)}{p(x_1)}$  를 구하고,  $r_2, r_3, r_4$ 로 부터  $p(x_i)$ 를 구하는 방법을 설명하라.

(c) 전체 동전중 앞면 수가  $mN$ 이고 환경이 충분히 커서  $N \gg 1$ 인 경우,  $r_2 = \frac{p(x_2)}{p(x_1)} = \frac{m}{1-m}$  임 보이고  $r_3 = \frac{p(x_3)}{p(x_1)}$ ,  $r_4 = \frac{p(x_4)}{p(x_1)}$  를 구하라. 단  $0 < m < 1$ 임.

(d) 환경 R의  $N$ 개 동전 중 앞면수가  $mN$ 인 경우, 환경의 엔트로피  $S_R = \ln \Omega_R$ 이

$$S_R = -N [m \ln m + (1-m) \ln(1-m)]$$

로 주어짐을 보여라.  $N \gg 1$ 라고 가정하고

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

를 사용하라.

(e)  $N \gg 1$ 인 경우, 환경 R의 온도  $T_R$ 를

$$\frac{1}{T_R} = \frac{1}{N} \frac{\partial S_R}{\partial m}$$

라 정의하자. 이 경우,  $\frac{1}{T_R}$ 를 계산하고, (c)에서 구한  $\frac{p(x_i)}{p(x_1)}$ 가

$$\frac{p(x_i)}{p(x_1)} = e^{-(E_i - E_1)/T_R}$$

로 주어짐을 보여라. 여기서  $E_i$ 는  $x_i$ 상태인 시스템 S의 동전 앞면수이다.