

# 열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2011. 06. 15.    월요일    15:00 - 16:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 필요시 다음을 이용할 것

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx$$

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1. [80점] 스핀 1인 보즈 이상기체의 고유상태는

$$|\vec{k}, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|s\rangle$$

로 주어진다. 여기서  $s$ 는  $-1, 0$ , 또는  $1$ 이다.  $|\vec{k}, s\rangle$  상태의 에너지는 (스핀 성분  $s$ 에 무관하게)  $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 으로 주어진다.

- (a) 에너지 레벨이  $\{\epsilon_i\}$ 로 주어질 때의 대분배함수를 구하고 이로부터  $|\vec{k}, s\rangle$  상태의 평균 입자수  $n_{\vec{k},s}$ 가

$$n_{\vec{k},s} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)} - 1}$$

로 주어짐을 보여라.

- (b) 계 전체의 평균 입자수  $N = \sum_{\vec{k},s} n_{\vec{k},s}$ 을

$$N = N_0 + N_{ex}$$

로 적을 때, 바닥 상태의 평균 입자수  $N_0$ 를 휴거시터  $z = e^{\beta\mu}$ 의 함수로 표현하라.

- (c) 들뜬 상태의 입자수  $N_{ex}$ 는

$$N_{ex} = C_1 g_{n_1}(z) \frac{V}{\lambda^3}$$

형태로 적을 수 있음을 보이고  $C_1, n_1, \lambda$ 를 구하라.

- (d) 들뜬 상태의 상대적 입자수  $N_{ex}/N$ 은

$$\frac{N_{ex}}{N} \leq \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고  $T_c$ 를

$$T_c = \frac{\hbar^2}{2m} \left(C_1 \frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

로 쓸 때,  $C_1$ 을 상수  $\pi, \zeta(\frac{3}{2})$ 의 함수로 나타내어라.

2. [60점] 고전 이상 기체의 경우, 고유 상태  $|\vec{k}\rangle$ 의 평균 입자수  $n_{\vec{k}}$ 가

$$n_{\vec{k}} = e^{-\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)}$$

로 주어짐을 이용하여 아래 물음에 답하라.

- (a) 계 전체의 평균 입자수가  $N = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$ 로 주어짐을 이용, 화학 퍼텐셜  $\mu$  및 휴거시터  $z = e^{\beta\mu}$ 를 기체의 밀도  $n = N/V$ 의 함수로 구하라.

- (b) 고전 이상기체의 대분배함수  $Z_G(T, V, \mu) = e^{\frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu}}$  임과  $N = \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)} \ln Z_G$ 임을 이용하여 휴거시터  $z = e^{\beta\mu}$ 를 고전 이상 기체의 밀도  $n = N/V$ 의 함수로 구하고 (a)의 결과와 일치함을 보여라.

3. [20점] Photon Gas의 비열은 모든 온도에서  $T^3$ 에 비례하는 반면 Phonon Gas는 온도가 낮은 경우만  $T^3$ 에 비례하는 이유는 무엇인지 간단히 기술하라.

4. [60점] 스핀 1/2인 페르미온 이상기체의 고유상태는

$$|\vec{k}, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|s\rangle$$

로 주어진다. 여기서 스핀 상태  $s$ 는  $+$ , 또는  $-$ 이다.  $|\vec{k}, s\rangle$  상태의 에너지는 (스핀 상태  $s$ 에 무관하게)  $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 으로 주어진다.

- (a) 에너지 고유 상태  $|\vec{k}, s\rangle$ 의 평균 입자수  $n_{\vec{k},s}$ 가

$$n_{\vec{k},s} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu)} + 1} \tag{1}$$

로 주어짐을 보여라.

- (b) 계 전체의 평균 입자수  $N = \sum_{\vec{k},s} n_{\vec{k},s}$ 은

$$N = C_2 f_{n_2}(z) \frac{V}{\lambda^3}$$

형태로 적을 수 있음을 보이고  $C_2, n_2, \lambda$ 를 구하라.

- (c) 페르미-디랙 함수  $f_{3/2}(z)$ 가

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots\right]$$

로 주어짐을 이용하여  $\ln z \gg 1$ 일 때,  $\mu$ 를

$$\mu \approx \epsilon_F \left[1 - C_3 \left(\frac{T}{\epsilon_F}\right)^2\right]$$

로 적을 수 있음을 보이고 상수  $C_3$ 와 밀도  $n = N/V$ 의 함수  $\epsilon_F$ 를 구하라.

5. [80점] 스핀 1/2인 페르미온 자유 기체가 있다.  $T=0$ 일 때, 아래 물음에 답하라.

- (a) 식(1)를 이용하여, 절대 0도에서 전체 입자수  $N$ 을

$$N = \sum_{|\vec{k}| \leq k_F} 1$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고  $k_F$ 의 값을 밀도  $n = N/V$ 의 함수로 구하라.

- (b) 절대 0도에서의 화학 퍼텐셜  $\epsilon_F$ 를 (a)에서 구한  $k_F$ 를 이용하여 구하고 3(c)에서 구한 결과와 일치함을 확인하여라.

- (c) 자기장  $\vec{B}$ 가 있는 경우,  $|\vec{k}, s\rangle$  상태의 에너지는

$$\epsilon_{\vec{k},s} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_s B$$

로 주어진다. 여기서  $\mu_s = -s\mu_B = -s\frac{e\hbar}{2mc}$ 는  $\vec{B}$ 방향 스핀 상태  $s$ 인 전자의 자기 모멘트이다.  $\mu_s = +\mu_B$ 인 전자의 밀도를  $n^+$ ,  $\mu_s = -\mu_B$ 인 전자의 밀도를  $n^-$ 라 할 때, 각각의 화학 퍼텐셜  $\mu^+$ 와  $\mu^-$ 를  $T=0$ 에서 구하라.

- (d) 평형 상태에서  $\mu^+$ 와  $\mu^-$ 가 같아야 함을 이용하여  $T=0$ 에서의 자기화  $[M = \mu_B(N^+ - N^-)]$ 를 자기장  $B$ 의 함수로 구하고,  $T=0$ 에서의 자화율 ( $\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B}$ )을 구하라.