

## 열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2011. 04. 25.    월요일    15:00 - 16:15

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- 과제 3: 문제지는 가지고 가서 풀어 4월 27일 제출

1. [60점] 길이  $L$ 인 일차원 상자에 입자 하나가 있어 해밀토니언이

$$H(x, p) = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} & \text{for } x \in [0, L] \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다. 이 계가 온도  $T$ 인 환경과 평형 상태에 있어 밀도 상태  $\rho = \frac{1}{Z} e^{-H/T}$ 로 기술된다.

(a) 분배함수  $Z$ 를 구하라.

(b) 밀도 상태의 실공간 성분

$$\rho(x, x') = \langle x | \rho | x' \rangle$$

를 계산하라.

(c) 밀도 상태의 실공간 표현의 대각선 값  $\rho(x, x)$ 를 계산하고 그 의미를 기술하라.

2. [60점] 에너지 레벨이  $\epsilon_0 = 0, \epsilon_1 = \epsilon \ln 2, \epsilon_2 = \epsilon \ln 3$ 인 세 개의 state로 이루어진 계에 두 개의 보존 입자가 놓여 있다.

(a) 가능한 전체 에너지 고유 상태는 6가지이다. 각각의 경우를 점유수 표현으로 나타내고 각 상태에 대한 에너지를 구하라.

(b) 온도  $T = \epsilon$ 인 열 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때, 분배함수  $Z$ 를 구하고, 바닥 상태인,  $\epsilon_0$  state에 있는 평균 입자수  $\langle n_0 \rangle$ 를 구하라.

3. [40점] 입자 하나의 에너지 레벨이  $\{\epsilon_l : l = 0, 1, \dots\}$ 로 주어지는 계에  $N$ 개의 구분 불가능한 고전 입자가 들어 있다. 이 계가 온도  $T = 1/\beta$ 인 환경과 평형 상태에 있을 때 분배 함수를 구하려고 한다.

(a)  $N = 1$ 인 경우, 즉 입자가 한 개인 경우의 분배함수  $Z(\beta, \{\epsilon_l\}, N = 1)$ 을 구하라.

(b) 구분 불가능한 고전 입자가  $N$ 개가 있는 경우, 분배함수는  $Z(\beta, \{\epsilon_l\}, N) = \frac{1}{N!} [Z(\beta, \{\epsilon_l\}, 1)]^N$ 로 주어짐을 이용하여

$$Z(\beta, \{\epsilon_l\}, N) = \sum_{\sum n_l = N} g(n_1, n_2, \dots) e^{-\beta \sum_l n_l \epsilon_l}$$

로 적을 수 있음을 보이고  $g(n_1, n_2, \dots)$ 를 구하라.

4. [80점] 스핀  $\frac{1}{2}$ 인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\downarrow\rangle$$

로 기술되는 pure 상태에 있다. 여기서  $|\uparrow\downarrow\rangle$ 는  $|\uparrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B$ 를 나타낸다.

(a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 행렬  $\rho_{AB}$ 을  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ 를 기저로 하여 나타내어라.

(b) B계의 밀도 행렬  $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ 를 구하라.

(c) 스핀의  $x$ 성분 고유 상태를  $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ 를 기저로 표현하면  $\langle \uparrow_x | = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1), \langle \downarrow_x | = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$ 임을 이용하여 스핀 B의  $x$ 성분 연산자  $s_x^B$ 를  $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ 를 기저로 표현하여라.

(d) 이 계의 스핀 B의  $x$ -성분을 측정할 때의 기대값을 구하라.

5. [60점] 길이  $L$ 인 일차원 상자에 자유 입자 두개가 있는 경우 밀도 연산자의 실공간 표현의 대각선 값은

$$\rho(x_1, x_2; x_1, x_2) = \frac{1 \pm \exp[-2\pi \frac{(x_1 - x_2)^2}{\lambda^2}]}{L^2 (1 \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2} L})}$$

로 주어짐을 수업시간에 계산하였다. 여기서  $\pm$ 의  $+$ 는 보존  $-$ 는 페르미온 입자들인 경우를 각각 나타낸다. 두 입자간의 유효 퍼텐셜  $U(r)$ 을

$$e^{-U(x_2 - x_1)/T} = \rho(x_1, x_2; x_1, x_2)$$

로 정의할 때,

(a)  $U(r)$ 의 물리적 의미를 기술하라.

(b)  $U(r)$ 을 계산하여라.

(c) 보존과 페르미온 각각에 대하여  $U(r)$ 의 대략적 형태를 그려라. 또, 보존과 페르미온 각각의 대해, 유효 퍼텐셜이 인력과 척력중 무엇을 의미하는지 기술하라.