열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채 시행일자: 2010. 10. 18. 월요일 15:00 – 16:20

자연과학 대학 학과 학년, 학번: 성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- **과제 3**: 문제지는 가지고 가서 풀어 10월 26일 제출

1. [60점] 세 개의 스핀 (s_1, s_2, s_3)로 이루어진 계의 해밀토니안이

$$H = -J \sum_i \delta_{s_i s_{i+1}}$$

로 주어진다. 여기서 $s_i \in \{1, 2, 3\}$이고 $\delta_{s_i s_{i+1}}$는 s_i 와 s_{i+1}이 같을 때는 1, 다를 때에는 0의 값을 갖는다. 문제를 간단히 하기 위해 $s_1 = 1$로 고정되어 있다고 하자. 주기 경계 조건을 이용하여 $s_4 = s_1$으로 놓고 아래 물음에 답하라.

(a) 이 계가 갖을 수 있는 에너지 U를 모두 적고, 각각의 에너지에 대하여 미시적 상태수 $\Omega(U)$를 구하라.

(b) 이 계가 온도 $T = J/\ln 2$인 환경과 평형 상태에 놓여있다. 이 계의 분배함수 Z를 구하여라.

(c) 이 계가 온도 $T = J/\ln 2$인 환경과 평형 상태에 놓여있을 때, 두 번째 스핀값 s_2 가 1일 확률 $p(s_2 = 1)$을 구하여라.

2. [60점] 길이 L인 일차원 상자속에 질량 m인 자유 입자가 두 개가 들어있어 계의 Hamiltonian은 $x_i \in [0, L]$인 경우

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m}$$

이고 $x_i \notin [0, L]$인 경우 ∞이다. 계의 에너지 범위가 주어졌을 때, 계의 미시 상태 수를 양자역학적 방법과 고전적 방법으로 각각 구하려고 한다. 두 입자는 서로 구별할 수 있다고 가정하라.

(a) 고전 역학적으로, 에너지가 U보다 작은 계의 상태 수 $\Sigma(U)$를 구하여라. 또, 이를 이용하여 에너지가 $[U, U + \delta U]$에 있는 상태수 $\Omega_C(U; \delta U)$를 구하면

$$\Omega_C(U; \delta U) = A_C\, mL^2 \delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수 A_C를 구하라.

(b) 양자 역학적으로 계의 에너지 띠는

$$\epsilon(n_1, n_2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(n_1^2 + n_2^2\right) = \left(n_1^2 + n_2^2\right) \epsilon_0 \qquad (1)$$

로 주어진다. 여기서 ϵ_0는 $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ 이고 n_i는 자연수이다. 에너지가 $U = 11\,\epsilon_0$보다 작은 계의 상태수 $\Sigma_Q(11\,\epsilon_0)$을 구하라.

(c) U가 ϵ_0보다 매우 클 때, 에너지가 $[U, U + \delta U]$에 있는 양자 역학적 상태수 $\Omega_Q(U; \delta U)$를 식 (**??**)를 이용하여 계산하여

$$\Omega_Q(U; \delta U) = A_Q\, mL^2 \delta U$$

로 쓸 수 있음을 보이고 상수 A_Q를 구하라.

3. [40점] 동전 A, B로 이루어진 시스템 S와 동전 C, D, E, F로 이루어진 환경 R이 서로 상호작용하여 전체 동전 6개 중 앞면인 것이 3개로 유지된다.

(a) 시스템 S가 가질수 있는 상태 x는 x_1 =(뒤,뒤), x_2 =(뒤,앞), x_3 =(앞,뒤), x_4 =(앞,앞) 의 4가지 상태이다. 각 상태에 있을 확률 $p(x_i)$를 구하라.

(b) 시스템 S에 있는 동전의 앞면수를 E라 할 때, $P(E = 0)$, $P(E = 1)$, $P(E = 2)$를 구하라.

4. [60점] 닫힌계 S가 온도 T인 환경 R과 열적 평형상태에 있다. 닫힌계 S가 상태 x에 있을 때 에너지를 E_x라 하자. 문제 3번의 메타포를 이용하여 다음 물음에 답하라.

(a) 시스템 S가 x상태에 있을 확률 $p(x)$가

$$p(x) = Ce^{-\beta E_x}$$

로 주어짐을 유도하고 C와 β는 무엇인지 계산하라.

(b) 시스템 S가 에너지 E를 가질 때의 엔트로피를 $\sigma(E)$로 나타낼 때, 시스템 S가 에너지 E를 가질 확률 $P(E)$를 C, β, $\sigma(E)$, E의 함수로 나타내어라.

5. [20점] Helmholtz 자유에너지 F는 $F = U - TS$로 주어진다. 여기서 U는 계의 평균에너지이고 S는 계의 엔트로피이다. 엔트로피가 $S = -\sum_x p_x \ln p_x$로 주어짐을 이용하여, 온도 T이고 분배함수가 Z인 닫힌계의 자유에너지가 $F = -T \ln Z$로 주어짐을 보여라.

6. [60점] 서로 구별할 수 **없는** N개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도 T인 열원과 평형상태에 있다. 이 계의 해밀토니안은

$$H(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \qquad (2)$$

로 주어진다.

(a) 이 계의 분배함수 $Z(N, T, \omega)$이

$$Z(N, T, \omega) = \frac{1}{N!} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^N \qquad (3)$$

로 주어짐을 보여라.

(b) 평균 에너지 $U = \langle E \rangle$를 구하라.

(c) Helmholtz 자유에너지 $F = F(\omega, T, N)$를 구하라.
를 구하여라.