

열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2010. 06. 16. 일요일 15:00 - 16:15

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

o 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것

1. [80점] Fermion 입자 계의 큰 틀 앙상블을 생각해보자

(a) 에너지 레벨이 ϵ_l 로 주어지는 Fermion 입자의 대분배 함수 Z_G 가

$$\ln Z_G = \frac{1}{a} \sum_l \ln [1 + a z e^{-\beta \epsilon_l}] \quad (1)$$

를 만족함을 보이고 a 값을 구하라. ($z = e^{\beta \mu}$ 임.)

(b) l -상태의 평균 입자 수 n_l 이

$$n_l = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} + a} \quad (2)$$

로 주어짐을 보이고 a 값을 구하라.

(c) 연속적인 에너지 레벨 ϵ 을 가정하고, 최소 에너지 레벨은 $\epsilon = 0$ 이라고 하자. $\beta \mu \gg 1$ 일 때, $n(\epsilon)$ 의 대략적 형태를 그래프로 그려라. 이 경우의 비열 C 의 온도 의존성이 어떻게 될지 논의하라.

(d) 금속 속의 전자들은 3차원 Fermi 이상기체로 근사되어 기술된다. 즉, 고유 상태가 $|\vec{k}, s\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} |s\rangle$ 로 주어진다. 여기서 스핀 $s = \pm \frac{1}{2} \hbar$ 를 갖을 수 있고, $|\vec{k}, s\rangle$ state의 에너지는 (s 상태에 무관하게) $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ 로 주어진다. $N = \sum_{\vec{k}, s} n_{\vec{k}, s}$ 임을 이용하여 $T = 0$ 에서의 화학 퍼텐셜 ϵ_F 는 $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^\alpha$ 로 주어짐을 보이고 α 를 구하여라. 여기서 $n = N/V$ 는 자유전자의 밀도이다.

2. [80점] 에너지 레벨이 $\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \epsilon, \epsilon_3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \epsilon$ 인 3 개의 state로 이루어진 계에 $N=2$ 개의 Fermi 입자가 놓여있다.

(a) 가능한 전체 에너지 고유 상태는 3가지이다. 각각의 경우를 점유수 표현으로 나타내고 에너지를 구하여라.

(b) 온도 $T = \frac{\epsilon}{\ln 2}$ 인 열 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때, 분배함수 Z 를 구하고, ϵ_l state의 평균 점유수 n_l ($l = 1, 2, 3$)를 구하여라. (n_l 의 답은 분수로 나타낼 것.)

(c) 온도 $T = \frac{\epsilon}{\ln 2}$, 푸거시티 $z = e^{\beta \mu}$ 인 환경과 평형 상태인 큰 틀 앙상블인 경우, l -상태의 평균 입자수 n_l^G 은

$$n_l^G = \frac{1}{\frac{1}{z} b_l + 1}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 b_l 을 분수의 형태로 나타내어라.

(d) $N = 2$ 로 고정되어 있을 때, (c)의 푸거시티는 어떻게 정하여지는지 설명하라. 이 푸거시티를 이용할 때, n_1^G 이 (b)의 n_1 보다 클지 작을지 수치적으로 판단하고 그 이유를 물리적으로 설명하라.

3. [80점] 열역학 큰 퍼텐셜은

$$\Phi = -T \ln Z_G \quad (3)$$

을 이용하여 계산할 수 있다.

(a) 엔트로피가 $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_\mu$ 로 주어짐과 식 (1-3)의 결과를 이용하여 Fermion 계의 엔트로피 S 가

$$S = -\sum_l [n_l \ln n_l + (1 - n_l) \ln(1 - n_l)]$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 n_l 은 l 번째 고유상태의 평균 입자수이다.

(b) 보존 계의 엔트로피는

$$S = -\sum_l [n_l \ln n_l + (1 + n_l) \ln(1 + n_l)]$$

로 주어짐을 보여라.

(c) 온도가 충분히 높은 고전 계의 경우, 페리미온과 보존 모두 엔트로피가

$$S = -\sum_l [n_l \ln n_l - n_l]$$

로 주어짐을 보이라.

(d) 엔트로피의 일반적 정의

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i$$

와 비교하여 (a)-(c)의 결과를 설명하라.

4. [60점] 해밀토니안의 고유상태 표현중, 입자 표현과 점유수 표현에 대하여 비교 설명하라.