열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채 시행일자: 2010. 04. 19. 월요일 15:00 – 16:15

자연과학 대학 학과 학년, 학번: 성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- **과제 3**: 문제지는 가지고 가서 풀어 4월 26일 제출
- 필요시 다음을 이용할 것
  - f차원 구의 부피: $V_f(R) = \frac{\pi^{f/2}}{\frac{f}{2}!} R^f$
  - $\displaystyle\int_{aq^2+bp^2=E} dq\, dp = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{s^2+t^2=E} ds\, dt$

---

1. [80점] 서로 구별할 수 **없는** N개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도 T인 열원과 평형상태에 있다. 이 계의 해밀토니안은

$$H(\{q_i, p_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \tag{1}$$

로 주어진다.

(a) 이 계의 분배함수 $Z(N, T, \omega)$이

$$Z(N, T, \omega) = \frac{1}{N!} \left(\frac{T}{\hbar\omega} \right)^N \tag{2}$$

로 주어짐을 보여라.

(b) 평균 에너지 $U = \langle E \rangle$와 비열 $C(T) = \frac{\partial U}{\partial T}$를 구하라.

(c) Helmholtz 자유에너지 $F = F(\omega, T, N)$를 구하여라.

(d) 온도와 입자수를 고정하고 ω를 변화시킬 때, 자유에너지 변화로 α를

$$\alpha = -\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{T,N} \tag{3}$$

로 정의할 때, α, ω, T, N이 만족하는 상태 방정식을 구하라.

2. [60점] 해밀토니안이 식(**??**)로 주어지는 서로 구별할 수 **없는** 1차원 조화진동자가 온도 T, 화학 퍼텐셜 μ인 환경과 평형 상태에 놓여있다.

(a) 식 (**??**)를 이용하여 대분배함수, $Z_G = Z_G(\omega, T, \mu)$를 구하라.

(b) 이 계의 평균 입자수 $N = N(\omega, T, \mu)$를 구하라.

(c) 대열역학 퍼텐셜 $\phi = F - \mu N$이 $\phi = -T \ln Z_G$임을 이용하여 Helmholtz 자유에너지 $F = F(\omega, T, N)$를 구하고 문제 1의 결과와 일치함을 보여라.

3. [100점] 해밀토니안이 식(**??**)로 주어지는 서로 구별할 수 **없는** N개의 1차원 조화진동자의 고립계가 있다.

(a) 계의 에너지가 $E \sim E + \delta E$에 있는 상태수 $\Omega(\omega, E, N; \delta E)$가

$$\Omega(\omega, E, N; \delta E) = \left(\frac{1}{N!} \right)^2 \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^N \left(\frac{N\delta E}{E} \right)$$

임을 보여라. (필요시 왼쪽 적분식및 구의 부피이용)

(b) 이 계의 엔트로피 $S(\omega, E, N)$가

$$S(\omega, E, N) = N\left[2 + \ln\left(\frac{E}{N\hbar\omega} \right) - \ln N \right] \tag{4}$$

임을 보이고 $\Delta S = 2S(\omega, E, N) - S(\omega, 2E, 2N)$를 구하라. $\Delta S \neq 0$인 이유는 무었인가?

(c) 작은 바른틀 앙상블의 온도 정의를 적고 이를 이용하여

$$E = NT \tag{5}$$

임을 보여라.

(d) Helmholtz 자유에너지는 $F = E - TS$로 정의된다. $F = F(\omega, T, N)$를 구하고 문제 1의 결과와 일치함을 보여라.

(e) 식(**??**)으로 바른틀 앙상블에서 정의한 α는 작은 바른틀 앙상블에서는

$$\alpha = -\left(\frac{\partial E}{\partial \omega} \right)_{S,N}$$

로 표현됨을 보여라. 또, 이 결과와 식 (**??**,**??**)를 이용하여 얻은 α, ω, T, N 간의 상태 방정식이 문제 1(d)의 결과와 같음을 보여라.

4. [60점] 1차원 조화진동자 퍼텐셜상에 있는 입자의 해밀토니안 H가

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

로 주어진다. 고유치 문제

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{6}$$

를 만족하는 고유상태 $|\psi\rangle$의 실공간 표현 $\psi(x)$와 운동량 공간 표현 $\psi(p)$이라고 하자.

(a) 연산자 x와 p의, x 고유치 $|x'\rangle$표현이

$$\langle x'|x = x'\langle x'|$$
$$\langle x'|p = -i\hbar \frac{d}{dx'} \langle x'|$$

라 하면, $[x\ p] = i\hbar$ 임을 보여라.

(b) 식 (**??**)과 (a)의 결과를 이용하여 $\psi(x)$가 만족하는 미분 방정식을 구하라.

(c) 식 (**??**)의 운동량 공간 표현을 이용하여 $\psi(p)$가 만족하는 미분 방정식을 구하라.