

열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2009. 04. 20. 일요일 15:00 - 16:15

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- 문제지는 가지고 가서, 모든 문제를 풀어 4월 27일 15:00까지 제출할 것 (과제 2에 해당)

1. [40점] 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자 하나로 이루어진 A계와 스핀 1인 입자로 이루어진 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow+\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow-\rangle$$

로 기술되는 pure 상태에 있다. 여기서 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 은 스핀 $1/2$ 인 입자의 z -방향의 스핀 up, down 상태를 각각 나타내고 $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ 은 스핀 1인 입자의 z -방향의 스핀이 $+1, 0, -1$ 인 상태를 나타낸다.

(a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 상태 ρ_{AB} 를 $\{|\uparrow+\rangle, |\uparrow 0\rangle, |\uparrow-\rangle, |\downarrow+\rangle, |\downarrow 0\rangle, |\downarrow-\rangle\}$ 을 기저로 하여 6×6 행렬로 나타내어라.

(b) A 스핀의 상태 $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ 를 $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ 을 기저로 하여 행렬로 나타내어라.

(c) B 스핀의 상태 $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ 를 $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$ 을 기저로 하여 행렬로 나타내어라.

(d) 스핀 1인 입자의 z 성분 스핀은 (c)의 기저로

$$s_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

로 표현된다. 스핀 B의 z 성분 s_z^B 의 기대값을 구하라.

2. [20점] 부피 V 인 상자속에 들어있는 자유입자 한 개의 해밀토니안은 $H = \frac{p^2}{2m}$ 으로 주어지고 H 의 고유상태를 $|\vec{k}\rangle$ 라 할 때, 고유 에너지는 $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 으로 주어진다. 이 자유입자의 분배함수

$$Z(T, V, 1) = \text{Tr} e^{-H/T}$$

가 V/λ^3 으로 주어짐을 보이고 λ 를 h, m, T 의 함수로 구하여라.

3. [30점] 온도 $\beta = \frac{1}{T}$, 화학 퍼텐셜 μ 인 환경과 평형상태를 이루는 열린계의 상태는 밀도연산자

$$\rho = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(H-\mu N)}$$

로 기술된다.

(a) 이 계가 보존 입자로 이루어져 있다면 대분배함수가

$$Z_G^{BF} = \prod \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_l}} \quad (1)$$

로 주어짐을 보이고 z 를 β 및 μ 의 함수로 구하라. 여기서 ϵ_l 은 한 입자계의 l 번째 고유 상태의 에너지이다.

(b) l 번째 고유 상태의 평균 입자수 $\langle n_l \rangle$ 을 구하여라.

(c) 평균에너지 U 가

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\ln Z_G]_{z, V}$$

로 주어짐을 보이고 식(1)를 이용하여 보존 입자계의 평균에너지를 구하여라.

4. [10점] 보존 입자와 페르미온 입자에 대하여 설명하여라.