

열 및 통계 물리 1 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2008. 12. 10. 수요일 15:00 - 16:30

대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정 과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것.
- 전자 계산기나 휴대전화를 사용하지 말고 손으로 계산할 것.

1. [10점] Helmholtz 자유 에너지 F 의 변화량 dF 는

$$dF = -S dT - p dV + \mu dN \quad (1)$$

로 주어진다. 이를 이용하여 다음 문제를 풀어라.

(a) 새로운 열역학 함수 B 를

$$B = F + pV - \mu N$$

이라 정의 하면 B 는 어떤 열역학 변수들의 함수인지 기술하고 증명하라.

(b) Maxwell 관계식

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}$$

을 식(1)을 사용하여 증명하여라.

2. [40점] 면적 A 인 결정체 표면에 흡착된 원자의 운동이 흡착 에너지 ϵ 인 2차원 이상 기체 운동으로 기술된다고 가정하자. 즉, N 개의 원자로 이루어진 이 계의 해밀토니언이

$$H(\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \epsilon\right) & \forall \vec{q}_i \in A \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

로 주어진다. 여기서 \vec{q}_i 는 2차원 위치 벡터, \vec{p}_i 는 2차원 운동량 벡터이다.

(a) 이 계의 원자 수가 N 으로 고정되어 있고 온도 T 인 환경과 평형상태에 있을 때, 이 계의 분배함수 Z 를 계산하여

$$Z(T, A, N) = \frac{1}{N!} [f(\lambda(T), A, \epsilon)]^N$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 함수 $f(\lambda, A, \epsilon)$ 를 구하라. 여기서 $\lambda = h/\sqrt{2\pi m T}$ 이다.

(b) Helmholtz 자유에너지 $F(T, A, N)$ 는 $F = -T \ln Z$ 로 주어진다. 화학 퍼텐셜이 $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ 임을 이용하여 $\mu = f_1(\epsilon) + T \ln f_2(N, A, \lambda)$ 의 형태로 쓸 수 있음을 보이고 f_1 및 f_2 를 구하라.

(c) 이 표면이 위 원자로 이루어진 단원자 분자 기체(온도 T , 화학 퍼텐셜 μ)에 노출되어 흡착 및 증발이 자유롭게 되고 있어 평형 상태를 이루게 되었다. 다시 말해, 2차원 표면이 온도 T , 화학 퍼텐셜 μ 인 환경과 평형 상태에 있다. 표면 원자 계의 대분배 함수 Z_G 를 구하라.

[힌트: $Z_G = \sum_N e^{\mu N/T} Z(T, A, N)$ 로부터 계산할 수 있음.]

(d) (c)의 결과를 이용하여 표면에 평균 원자수 밀도 $\langle N \rangle$ 를 계산하고 (b)의 결과와 일치함을 보여라.

3. [30점] $T_1 = 27^\circ\text{C}$ (300K)의 물 $m = \frac{160}{11} \text{g}$ 을 $T_2 = 77^\circ\text{C}$ (350K)의 열저장고 (heat reservoir)과 접촉시켜서 준정적과정으로 물의 온도를 $T_2 = 77^\circ\text{C}$ 까지 올렸다가 다시 $T_1 = 27^\circ\text{C}$ 의 열저장고 (heat reservoir)와 접촉시켜서 원래 온도인 $T_1 = 27^\circ\text{C}$ 의 물로 되돌아 왔다. 이 과정에서 증가한 엔트로피를 구하고자 한다.

(a) Boltzman 상수 k_B 를 1로 놓으면 $1\text{K} \approx (1/11000) \text{eV}$ 이다. 물의 비열이 $c_v = 1 \text{cal/g} \cdot \text{K} = 4.2 \text{J/g} \cdot \text{K}$ 이고 전자의 전하량 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 임을 이용하여 $\frac{160}{11} \text{g}$ 물의 열용량을 숫자로 구하여라 (유효숫자 두 자리로 계산할 것)

(b) 물이 $T_1 = 27^\circ\text{C}$ 에서 $T_2 = 77^\circ\text{C}$ 로 변하는 동안 받은 열 Q_2 과 $T_2 = 77^\circ\text{C}$ 에서 $T_1 = 27^\circ\text{C}$ 로 변하는 동안 열저장고엔 준열 Q_1 를 구하라.

(c) 물이 $T_1 = 27^\circ\text{C}$ 에서 출발하여 $T_1 = 27^\circ\text{C}$ 로 되돌아 오는 과정에 열저장고의 엔트로피는 얼마나 변화하였는가? 물과 열 저장고 전체의 엔트로피 변화는 얼마인가?

4. [30점] 카르노 기관은 다음과 같은 순환 과정을 밟는다. 여기서 열(heat)은 기관이 받는 열이다. 즉 $Q > 0$ 이면 기관으로 열이 들어오는 것이고 $Q < 0$ 이면 열이 밖으로 나가는 것이다. 일정한 양의 이상기체가 기관속에 있다고 가정하고 다음 물음에 답하라.

	process	initial state	final state	heat
12	등온 팽창 (T_1)	(V_1, p_1)	(V_2, p_2)	Q_{12}
23	단열 팽창	(V_2, p_2)	(V_3, p_3)	0
34	등온 압축 (T_3)	(V_3, p_3)	(V_4, p_4)	Q_{34}
41	단열 압축	(V_4, p_4)	(V_1, p_1)	0

(a) 위 기관의 사이클을 p - V 그래프로 나타내고 이 기관이 사이클 당 한 순수 일 W 를 그래프에 빗금(hatching)으로 표시하여라.

(b) 위 기관의 사이클을 T - S (온도-엔트로피) 그래프로 나타내고 이 기관이 사이클 당 한 순수 일과 동등한 열의 량을 그래프에 빗금(hatching)으로 표시하여라.

(c) 열 기관의 효율은 사이클 당 한 순수 일 W 와 팽창시 들어간 열 Q_{12} 의 비로 주어진다. (b)의 T - S 의 그래프를 다시 그리고 Q_{12} 를 빗금으로 표시한 후, (b)의 빗금과 비교하여 열 효율이 $\eta = 1 - \frac{T_3}{T_1}$ 으로 주어짐을 보여라.