

열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2008. 10. 15. 수요일 15:00 - 16:20

대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정 과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- 문제지는 가지고 가서, 모든 문제를 풀어 10월 22일 15:00까지 제출할 것 (과제 3에 해당)

1. [30점] 1차원 운동을 하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + mgy & \text{for } y > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다.

- (a) 이 입자 에너지가 U 보다 작을 때의 상태를 위상 공간에 그래프로 나타내어라.
- (b) 이 입자 에너지가 U 보다 작은 상태수 $\Sigma(U)$ 를 구하여라.
- (c) 이 입자 에너지가 $[U, U + \delta U]$ 사이에 있을 때, 엔트로피를 구하여라.

2. [40점] 서로 구별할 수 없는 N 개의 단원자로 이루어진 이상기체가 면적 $A = L \times L$ 인 **2차원** 표면상에서 움직이고 있다. 이 계의 Hamiltonian, H 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 \frac{p_{i,\alpha}^2}{2m}. & \text{for } \vec{r} \in A \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다. 여기서 m 은 입자의 질량이고, $p_{i,\alpha}$ 는 i ($i = 1, \dots, N$)번째 입자의 운동량의 α ($\alpha = x, y$)성분을 나타낸다. 이 이상기체가 고전 역학으로 기술될 수 있는 경우를 생각한다.

- (a) 이 계의 에너지가 U 보다 작은 상태수 $\Sigma(U)$ 를 구하여라. 단, 반지름 R 인 f 차원 구의 부피 $V_{sp}(f; R)$ 는 R^f 에 비례함을 이용하여 $V_{sp}(f; R) = C(f) R^f$ 로 놓고 계산하여라.
- (b) 이 계가 열적으로 고립되어 있어, 에너지가 보존된다. 이 계의 에너지가 U 인 경우 계의 엔트로피는

$$S(N, V, U) = C_1(N) \ln A + C_2(N) \ln U + f(m, N)$$

의 형태로 적일 수 있음을 보이고 C_1 와 C_2 를 구하라.

- (c) 온도의 정의 및 (b)의 결과를 이용하여, 온도 T 와 계의 에너지 U 가 서로 비례하여

$$U = C_3(N) T$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C_3 을 구하라.

- (d) 2차원 압력 p_2 는 $p = -\frac{\partial U}{\partial A}|_{S, N}$ 으로 정의된다. 이 정의 및 (b, c)의 결과를 이용하여 2차원 이상기체의 상태방정식 (p, A, T 변수간의 관계식)을 구하라.

3. [30점] 두 개의 Ising 스핀 (s_1, s_2)로 이루어진 계의 Hamiltonian이

$$H = -J s_1 \cdot s_2 - B(s_1 + s_2)$$

로 주어진다. 여기서 $s_i \in \{+1, -1\}$ 이고 $B = \frac{1}{2}J$ 이다. 이 계가 온도 $T = \frac{J}{\ln 2}$ 인 환경과 열적 평형 상태이 있다.

- (a) 이 계의 분배함수 (partition function)을 구하여라. (최종 답은 숫자로 적을 것.)
- (b) 두 스핀이 모두 up일 확률 $p(s_1 = 1, s_2 = 1)$ 을 구하여라. (최종 답은 숫자로 적을 것.)
- (c) 이 계의 엔트로피가

$$S = A \ln 2 + B \ln 3$$

의 형태로 주어짐을 보이고 A 와 B 를 구하여라.

(힌트: 엔트로피는 $s = -\sum_x p_x \ln p_x$ 로 주어짐.)