

열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2008. 06. 16. 월요일 15:00 - 16:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

1. [40점] 에너지 레벨이 $\epsilon_0 = -\epsilon$, $\epsilon_1 = \epsilon$ 인 2 개의 state로 이루어진 계에 N 개의 Boson 입자가 놓여있다.

(a) 전체 입자 수가 $N = 2$ 인 경우, 가능한 전체 에너지 고유 상태는 3가지이다. 각각의 경우, 점유수 표현으로 나타내고 에너지를 구하여라.

(b) 온도 $T = \frac{\epsilon}{\ln 2}$ 인 열 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때, $N = 2$ 인 경우의 분배함수 Z 를 구하고, ϵ_l state의 평균 점유수 n_l ($l = 0, 1$)를 구하여라. (Z, n_0, n_1 의 답은 모두 분수 형태의 숫자로 적을 것.)

(c) 입자의 갯수가 많은 경우 ($N \gg 1$), 위의 바른 틀 앙상블 방법은 계산이 복잡해져, 큰 바른 틀 앙상블 방법을 사용하게 된다. 큰 바른 틀 앙상블을 이용하면, $T = \frac{\epsilon}{\ln 2}$ 인 경우, 두 에너지 level의 평균 입자수 비가

$$\frac{\langle n_1 \rangle}{\langle n_0 \rangle} = \frac{A - Bz}{C - Dz}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 정수 A, B, C, D 를 구하라. 여기서 $z = e^{\beta\mu}$ 는 퓨가시티이다.

(d) 전체 입자 수 N 이 고정되어 있을 때, (c)의 퓨가시티는 어떻게 정하여지는지 설명하고, $T = \frac{\epsilon}{\ln 2}$ 인 경우 z 가 만족하는 방정식을 적어라.

2. [20점]

(a) 큰 바른 틀을 이용하면, 대분배 함수가

$$Z_G = \sum_{\{n_l\}} e^{-\beta \sum_l n_l (\epsilon_l - \mu)}$$

로 주어진다. 이를 이용하여, 보손과 페르미온의 경우 모두 level 에너지 ϵ_l 에 있는 평균 입자 점유수 $\langle n_l \rangle$ 이

$$\langle n_l \rangle = \frac{A}{B e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} + C}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 A, B, C 를 구하라.

(b) 페르미온의 경우, 위의 식으로 주어지는 평균 점유수 $\langle n_l \rangle$ 를 y -축, level 에너지 ϵ_l 를 x -축으로 하여 그래프로 나타내어라.

3. [40점]

빛알 (photon)은 화학 에너지가 $\mu = 0$ 인 질량이 없는 스핀 1의 보손 입자로 생각할 수 있다. 단, 편극은 $s_z \in \{1, -1\}$ 의 두 상태만 가능하다.

(a) $|\vec{k}, s_z\rangle$ 의 상태의 에너지가 s_z 상태에 상관 없이 $\epsilon_{\vec{k}, s_z} = \hbar ck = \hbar\omega$ 임을 이용하여

$$\langle n_{\vec{k}, s_z} \rangle = \frac{A}{B e^{\beta \hbar c |\vec{k}|} + C} \quad (1)$$

임을 보이고 A, B, C 를 적어라.

(b) 프랑크 복사식

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

을 식(1)을 이용하여 유도하여라.

(c) 온도 T 인 흑체 복사의 단위 부피당 에너지 $u(T)$ 가

$$u(T) = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} T^4$$

임을 보여라. (필요한 경우, $\int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ 임을 이용하라.)

(d) 온도 T 인 흑체 복사의 단위 부피당 광자의 평균 입자 수는 T 에 몇 제곱에 비례하는지 식 (1)을 이용하여 구하여라.