

열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2008. 04. 23. 수요일 15:00 - 16:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 답지에 풀이과정 과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것
- 문제지는 가지고 가서, 모든 문제를 풀어 4월 28일 15:00까지 제출할 것 (과제 3에 해당)

1. [20점] 에너지가 각각 ϵ , 2ϵ , 3ϵ 로 주어지는 세 개의 에너지 고유 상태를 가지는 계에 입자 1개가 있다. 이 계가 온도 $T = \frac{1}{\ln 2} \epsilon$ 인 환경 (Heat Reservoir)과 평형 상태를 이룰 때,

- (a) 이 계의 에너지가 ϵ 일 확률을 구하라.
- (b) 이 계의 평균 에너지를 구하라.

2. [30점] 화학 퍼텐셜 μ , 온도 T 인 유체를 결정체 위에 놓아 평형 상태를 만들었을 때, 결정체 표면에 흡착되는 원자수 N_a 를 계산하려고 한다. 표면에 원자가 흡착할 수 있는 전체 격자점 수를 M 이라 하자. 표면에 흡착된 원자들은 유체속의 원자에 비하여 에너지가 ϵ 만큼 감소한다.

- (a) 표면에 흡착될 수 있는 최대 원자 수는 M 이다. 표면에 원자가 전혀 흡착되지 않은 경우의 계 에너지를 0으로 정의하면 N 개가 흡착된 계의 에너지는 $E = -N\epsilon$ 이 된다 ($N \leq M$). 원자가 N 개가 흡착된 경우의 분배함수 Z_N 이

$$Z_N = M C_N e^{t}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 t 를 N , ϵ , T 의 함수로 구하라. 여기서 $M C_N$ 은 M 개 중에서 N 개를 선택하는 경우의 수이다.

- (b) 대분배함수

$$Z_G = \sum_x e^{-[E(x) - \mu N(x)]/T} = \sum_N Z_N e^{\mu N/T} \quad (1)$$

가

$$Z_G = (1 + A)^M \quad (2)$$

의 형태로 적일 수 있음을 보이고 A 를 구하라.

- (c) 식(1)을 이용하여 평균 흡착 원자수 $N_a = \langle N \rangle$ 이

$$N_a = \frac{\partial}{\partial(\mu/T)} \ln Z_G$$

임을 보이고 식(2)에 적용하여 N_a 를 구하여라.

3. [20점] 스핀 1인 입자의 z -방향의 고유상태 $\{|+1_z\rangle, |0_z\rangle, |-1_z\rangle\}$ 와 x -방향의 고유상태 $\{|+1_x\rangle, |0_x\rangle, |-1_x\rangle\}$ 간의 내적은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \langle +1_x | +1_z \rangle &= 1/2 & \langle +1_x | 0_z \rangle &= 1/\sqrt{2} & \langle +1_x | -1_z \rangle &= 1/2 \\ \langle 0_x | +1_z \rangle &= 1/\sqrt{2} & \langle 0_x | 0_z \rangle &= 0 & \langle 0_x | -1_z \rangle &= -1/\sqrt{2} \\ \langle -1_x | +1_z \rangle &= 1/2 & \langle -1_x | 0_z \rangle &= -1/\sqrt{2} & \langle -1_x | -1_z \rangle &= 1/2 \end{aligned}$$

- (a) 이 스핀이 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1_z\rangle + |-1_z\rangle)$ 상태에 있을 때, $|\psi\rangle$ 를 $\{|+1_x\rangle, |0_x\rangle, |-1_x\rangle\}$ 를 기저로 하여 표현하여라
- (b) 위의 스핀 상태를 밀도 행렬 ρ 로 나타내고 ρ 를 $\{|+1_x\rangle, |0_x\rangle, |-1_x\rangle\}$ 를 기저로 하여 표현하여라

4. [30점] 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B - \frac{\sqrt{3}}{2} |\uparrow_z\rangle_A |\downarrow_z\rangle_B$$

로 기술되는 pure 상태에 있다.

- (a) A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 행렬 ρ_{AB} 을 $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ 를 기저로하여 나타내어라. 여기서 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 는 $|\downarrow_z\rangle_A |\uparrow_z\rangle_B$ 를 나타낸다.
- (b) B계의 밀도 행렬 $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ 를 구하라. 스핀 B는 순수 (pure) 상태인가 혼합(Mixed) 상태인가?
- (c) 일반적으로 연산자 G 의 기대값 $\langle G \rangle$ 는

$$\langle G \rangle = \text{Tr}(G\rho)$$

로 주어진다. 스핀 B의 x -성분, s_x^B 의 기대값을 구하라. (참고: s_x^B 의 $\{|\uparrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_B\}$, 기저 표현은 $\frac{\hbar}{2}\sigma_x$ 로 표현된다. 여기서 σ 는 파울리 행렬이다.)