열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채　　　　시행일자: 2007. 10. 11. 목요일 15:00 – 16:30

대학　　　학과　　　학년,　　학번:　　　　성명:

○ 답지에 풀이과정 과 답을 정리하여 적은 후 제출할 것

○ 문제지는 가지고 가서, 모든 문제를 풀어 10월 23일 15:00까지 제출할 것 (**과제 3**에 해당)

---

1. [20점] 연속 확률 변수 x의 확률 밀도 함수 $\rho(x)$가

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -1 \\ 1/2 & \text{for } -1 \le x < 0 \\ 1/2 - x/4 & \text{for } 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{for } x \ge 2 \end{cases}$$

로 주어진다.

(a) 확률 $p(|x| < 1/2)$를 구하라.

(b) x의 평균 $\langle x \rangle$를 구하여라.

2. [20점]

(a) A, B 두 사람이 걷다가 2,000원을 주웠다. 주사위 하나를 번갈아 던저 1의 눈이 먼저 나오는 사람이 2,000원을 모두 갖기로 하였다. A부터 주사위를 던진다면, A의 기대값은 얼마인가?

(b) A, B 두 사람이 걷다가 2,000원을 주웠다. 주사위 하나를 번갈아 던저 1의 눈이 나오면 1,000원씩 갖기로 하였다. A부터 주사위를 던진다면, A의 기대값은 얼마인가?

3. [10점] 음이 아닌 정수를 가지는 확률 변수 n의 확률 $p(n)$이

$$p(n) = (1-a)a^n$$

로 주어진다. 여기서 a는 $0 < a < 1$을 만족하는 상수이고 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 이다. n의 평균, $\langle n \rangle$를 구하여라.

4. [20점] 1차원 운동을 하는 어떤 입자의 Hamiltonian이

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{for } x > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다. [주의: 위치에너지가 x가 아니라 x^2에 비례함.]

(a) 이 입자 에너지가 E 보다 작을 때의 상태를 위상 공간에 그래프로 나타내어라

(b) 이 입자 에너지가 E보다 작은 상태수 $\Sigma(E)$를 구하여라.

(c) 이 입자의 상태 밀도 함수 $\omega(E)$를 구하라.

5. [30점] 길이 L인 일차원 상자속에 질량 m인 자유 입자가 두 개가 들어있어 계의 Hamiltonian은 $x_i \in [0, L]$인 경우

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m}$$

이고 $x_i \notin [0, L]$인 경우 ∞이다. 계의 에너지 범위가 주어졌을 때, 계의 미시 상태 수를 양자역학적 방법과 고전적 방법으로 각각 구하려고 한다.

(a) 고전 역학적으로, 에너지가 E인 계의 상태 수 $\Sigma(E)$는

$$\Sigma(E) = \frac{V(E)}{h^2}$$

로 주어진다. 여기서 $V(E)$는 $H(p_1, p_2, x_1, x_2) < E$를 만족하는 위상 공간의 부피이다. 이를 이용하여 $\Sigma(E)$를 구하고 에너지가 $[E, E + \delta E]$에 있는 상태수 $\Omega(E; \delta E)$를 구하여라.

(b) 양자 역학적으로 계의 에너지 띠는

$$\begin{aligned} \epsilon(n_1, n_2) &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right) \\ &= \left(n_1^2 + n_2^2\right)\epsilon_0 \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 ϵ_0는 $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ 이고 n_i는 자연수이다. 에너지가 $E = 9\,\epsilon_0$보다 작은 계의 상태수 $\Sigma_Q(9\,\epsilon_0)$을 구하라.

(c) E가 ϵ_0보다 매우 클 때 $\epsilon(n_1, n_2) < E$를 만족하는 자연수쌍의 갯수를 근사적으로 계산하여 $E \gg \epsilon_0$ 인 경우의 $\Sigma_Q(E)$를 구하라.