

열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2007. 06. 21. 화요일 15:00 - 16:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

1. [40점] M 개의 에너지 레벨로 이루어진 계에 k 번째 에너지는 ϵ_k 로 주어진다. 여기서 $k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ 이다. 이 계에 보존 입자 2개가 있다.

(a) $M = 2$ 인 경우, 가능한 전체 에너지 고유 상태를 $|n_0, n_1\rangle$ 형태의 점유수 표현으로 나타내라. 또, 이 계가 온도 T 인 환경과 평형 상태를 이룰 때, 분배함수 Z_B 를 구하라.

(b) (a)에서 구한 $M = 2$ 인 경우의 분배 함수를 입자 표현을 이용하여 다시 계산해보자. 두 개의 입자가 서로 구분 가능하다고 하면, 첫 번째 입자의 에너지를 E_1 , 두 번째 입자의 에너지를 E_2 라 할 때, 가능한 상태는 $(E_1, E_2) \in \{(\epsilon_0, \epsilon_0), (\epsilon_0, \epsilon_1), (\epsilon_1, \epsilon_0), (\epsilon_1, \epsilon_1)\}$ 이 되어 분배 함수는

$$Z_D = e^{-2\epsilon_0/T} + 2e^{-(\epsilon_0+\epsilon_1)/T} + e^{-2\epsilon_1/T} \quad (1)$$

이 된다. 보존 입자는 서로 구분되지 않는다는 점을 고려할 때, 식 (1) 우변의 3항 중 어느 항이 변경되어야 하는지 설명하고 보존 입자의 분배함수를

$$Z_B = \frac{1}{2} \left(e^{-\epsilon_0/T} + e^{-\epsilon_1/T} \right)^2 + C_1 \left(e^{-2\epsilon_0/T} + e^{-2\epsilon_1/T} \right)$$

의 형태로 적을 때의 C_1 값을 구하라.

(c) 무한계의 에너지 레벨이 있고 ($M = \infty$), k 번째 에너지가 $\epsilon_k = k\epsilon$ 로 주어지는 경우의 분배함수를 구하라. (힌트: (b)의 방법을 이용하라.)

(d) (a) 및 (c)의 결과를 이용하여 $\epsilon_k = k\epsilon$ 일 때, $M = 2$ 인 경우와 $M = \infty$ 인 경우의 평균에너지를 각각 구하라.

2. [20점] 점유수 표현을 이용하면 보존과 페르미온의 경우 모두 대분배 함수가

$$Z_G = \sum_{\{n_l\}} e^{-\beta \sum_l n_l (\epsilon_l - \mu)}$$

의 형태로 적을 수 있다. 여기서 에너지 레벨 l 의 점유 입자수 n_l 은 $n_l \in \{0, 1\}$ (페르미온) 또는 $n_l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (보존)이다. 이를 이용하여 대퍼텐셜 $\Phi = -T \ln Z_G$ 가

$$\Phi = -C_2 T \sum_l \ln \left[1 + C_2 e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)} \right]$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 보존 및 페르미온의 경우 각각에 대하여 C_2 값을 구하라.

3. [40점]

(a) 스핀 1/2인 입자의 x -방향의 스핀의 고유 상태 $|\uparrow_x\rangle$ 와 $|\downarrow_x\rangle$ 은

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)$$

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle)$$

로 주어진다. $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ 를 기저로 하여 $|\uparrow_x\rangle$ 및 $|\downarrow_x\rangle$ 을 행 벡터로 표현하라.

(b) x -방향의 스핀 up 상태 $|\uparrow_x\rangle$ 60%와 down 상태 $|\downarrow_x\rangle$ 40%가 섞여있는 혼합(mixed) 상태를 z -방향의 스핀 고유 상태(eigen state)를 기저(basis)로 하여 행렬로 나타내라.

(c) 자기장 $\vec{B} = B\hat{x}$ 속에 스핀 1/2 입자가 있어 해밀토니언이

$$H = -\vec{S} \cdot \vec{B} = -(\mu B) \sigma_x$$

로 주어진다. 여기서 μ 는 보어 마그네톤이고 σ_x 는 $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ 를 기저로 하여 표현하면 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다. 이 스핀이 온도 T 인 환경과 열적 평형 상태에 있을 때 스핀의 상태 행렬 ρ 가

$$\rho = C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\tanh C_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 C_3 과 C_4 를 구하라. 필요하면 $e^{a\sigma_x} = (\cosh a)\mathbb{I} + (\sinh a)\sigma_x$ 임을 이용하라.

(d) (c)의 입자가 열적 평형 상태에서 x -방향의 스핀 up 상태 60%와 down 상태 40%의 혼합 상태로 있다면 온도는 얼마인지 계산하라.