

열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2007. 04. 24. 화요일 15:00 - 16:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

1. [25점] N 개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계의 해밀토니안은

$$\begin{aligned}
 H(\{q_i, p_i\}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{2m} \quad (1)
 \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 $k = m\omega^2$ 는 용수철 상수이다. 서로 구별할 수 있는 경우,

(a) [15점] 계의 에너지가 $[U, U + \Delta U]$ 에 있는 상태수 $\Omega(\omega, U, N; \Delta U)$ 가

$$\Omega(\omega, U, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{U}{\hbar\omega} \right)^N \left(\frac{N\Delta U}{U} \right)$$

임을 보여라.

(b) [10점] 이 계의 엔트로피 $S(\omega, U, N)$ 를 구하고 작은 바른 틀 앙상블의 온도 정의를 이용하여 에너지 U 인 계의 온도 T 는

$$T = U/N \quad (2)$$

로 주어짐을 보여라.

2. [25점] 식(1)로 주어지는 N 개의 1차원 조화 진동자로 이루어진 계가 온도 T 인 열원과 평형상태에 있다.

(a) [10점] 분배함수 $Z_N(T)$ 를 구하라.

(b) [5점] 평균 에너지 $U = \langle E \rangle$ 를 구하라.

(c) [10점] Helmholtz 자유에너지 $F = -T \log Z$ 를 구하고 $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ 로 부터 엔트로피를 구하라. 이 결과가 1번 (b)의 엔트로피와 일치함을 보여라.

3. [20점] 세 개의 에너지 레벨, $-\epsilon, 0, \epsilon$ 을 가지는 1개의 입자로 이루어진 계를 생각하자. 이 계가 온도 T 인 Heat Reservoir와 평형 상태를 이룰 때,

(a) 이 계의 에너지가 ϵ 일 확률을 구하라.

(b) 이 계의 평균 에너지를 온도 T 의 함수로 구하라. 또, 온도가 0 및 무한대로 가는 극한에서의 평균 에너지를 계산하고 그 결과를 직관적으로 설명하라.

4. [30점] 중력장 내에서 운동을 하는 질량 m 인 입자의 해밀토니안은

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + mgz & \text{for } y > 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어진다. 이 입자가 온도 T 인 heat reservoir속에서 평형 상태에 있을 때, 입자의 평균 높이 $\langle z \rangle$ 및 평균 속력 $\langle v \rangle$ 를 구하라.

필요시 다음을 이용할 것

- 반지름 R 인 f 차원 구의 체적

$$V_f(R) = \frac{\pi^{f/2}}{\left(\frac{f}{2}\right)!} R^f$$

- $\int_{ax^2 < U} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t^2 < U} dt$