

열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2004. 10. 21. 목요일 10:00 - 11:40

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

1. [20점]

(a) A, B 두 사람이 걷다가 2,000원을 주웠다. 주사위 하나를 번갈아 던져 1이나 2가 나오면 2,000원을 모두 갖기로 하였다. A부터 주사위를 던진다면, A의 기대값은 얼마인가?

(b) A, B 두 사람이 걷다가 2,000원을 주웠다. 주사위 하나를 번갈아 던져 1이나 2가 나오면 던진 사람이 1,000원씩 갖기로 하였다. 2000원이 모두 없어질 때까지 번갈아 던질 때, A의 기대값은 얼마인가? (주사위는 A부터 던진다.)

2. [20점] 확률 변수 k 가 이항분포 $B(N, p)$ 를 따를 때, 즉 $k \sim B(N, p)$ 일 때, 확률 분포 함수 $p(k)$ 는

$$p(k) = {}_N C_k p^k q^{N-k}$$

로 주어진다. 여기서 $q = 1 - p$ 이다.

(a) k 의 평균 $\langle k \rangle$ 를 구하라.

(b) k 의 분산 $\langle (\Delta k)^2 \rangle$ 를 구하라.

3. [20점]

(a) $k \sim B(N, p)$ 인 이항 분포에서 유한한 $Np = \mu$ 를 유지하면서 $N \rightarrow \infty$ 극한을 고려하면 확률 분포 함수 $p(k)$ 가

$$p(k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

로 주어지는 포아송 분포가 됨을 보여라.

(b) (a)를 이용하여, $t = 0$ 에 생성된 핵분열 가능 입자가 시간 t 까지 분열하지 않을 확률 $p(t)$ 를

$$p(t) = e^{-at}$$

의 형태로 쓸 수 있음을 보이고 a 의 의미를 설명하라. 또, 입자의 평균 생존 시간 τ 와 방사능 물질이 처음양의 반으로 줄어드는 반감기 λ 를 a 의 함수로 나타내어라. (힌트: 붕괴 반응이 dt 시간에 일어날 확률을 p 라할 때, t 시간이 지나면, 성공 확률 p 의 독립사건을 $N = \frac{t}{\tau}$ 번 수행한 것으로 생각할 수 있음.)

4. [20점] 어떤 입자가 퍼텐셜

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{for } |y| < \frac{L}{2} \\ \infty & \text{for } |y| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

속에서 2차원 운동을 하고 있다. 즉,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

로 주어지는 Hamiltonian을 가지고 $|y| < \frac{L}{2}$ 범위 안에서 운동하고 있다. 에너지가 E 보다 작은 상태수 $\Sigma(E)$ 및 에너지가 $[E, E + \delta E]$ 사이에 있는 상태수 $\Omega(E)$ 를 구하여라. (필요한 경우 $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq 1$ 로 주어지는 타원체의 부피는 $V = \frac{4\pi}{3}abc$ 임을 이용하라.)

5. [20점] 입자 하나는 3개의 양자 상태 $\epsilon, 0, -\epsilon$ 중 한 상태만 가질 수 있다. (서로 구분 가능한) 입자 네 개로 이루어진 계의 총 에너지가 E 일 때 상태 수를 $E = 0, E = \epsilon, E = 2\epsilon, E = 3\epsilon, E = 4\epsilon$ 일 때, 각각 구하여라.