

열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2004. 06. 15. 화요일 10:00 - 11:40

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- 1, 2번은 필수 문제임.
- **3번과 4번중 1문제를 선택** 하여 풀고 답안지 이름 옆에 자신이 선택한 문항을 적을 것

1. [30점] 에너지 레벨이 $\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \epsilon, \epsilon_3 = 2\epsilon$ 인 3 개의 state로 이루어진 계에 2개의 Fermion 입자가 놓여있다.

(a) 가능한 전체 에너지 고유 상태는 3가지이다. 각각의 경우, 점유수 표현으로 나타내어고 에너지를 구하여라.

(b) 온도 $T = \frac{\epsilon}{\ln 2}$ 인 열 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때, 분배함수 Z 를 구하고, 점유수 표현을 기저로 하여, 밀도 행렬을 표현하여라.

(c) ϵ_k state의 평균 점유수 n_k ($k = 1, 2, 3$)를 구하여라.

2. [30점]

(a) [10점] 에너지 레벨이 ϵ_l 로 주어지는 보즈 입자의 대분배 함수 Z_G 를 구하고 l -상태의 평균 입자 수 n_l 이

$$n_l = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} - 1} \quad (1)$$

로 주어짐을 보여라.

(b) [20점] 보즈 이상기체의 경우, 상태 $l = |\vec{k}, s_z\rangle$ 의 에너지는 (s_z 상태에 무관하게) $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ 로 주어진다. 계 전체의 평균 입자수 N 은 각 상태에 있는 평균입자수의 합으로 주어진다. 즉,

$$N = \sum_{\vec{k}, s_z} n_{\vec{k}, s_z} \quad (2)$$

이다. 식 (??)와 (??)를 이용하여, 스핀 1인 **2차원** 보즈 입자의 입자 밀도 N/A 를 휴거스티 z 의 보즈-아인슈타인 적분함수로 나타내고 **2차원**의 경우 보즈-아인슈타인 응집 현상이 나타나지 않음을 보여라. 보즈-아인슈타인 적분 함수 $g_n(z)$ 는

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx$$

로 주어진다.

3. [40점] 온도 T 인 열 저장실과 평형상태에 있는 양자 이상기체의 밀도 행렬 ρ 는

$$\rho^{B,F} = \frac{1}{Z_{B,F}} e^{-\beta H}$$

으로 주어진다. 여기서, B 는 보존, F 는 페르미온을 나타내며, 해밀토니안 H 는

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

로 주어진다.

(a) [20점] 두 개의 입자로 이루어진 계의 분배함수가 $Z^{B,F}$ 가

$$Z^{B,F} = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^2 \left(1 \pm 2^{-\frac{3}{2}} \frac{\lambda^3}{V} \right)$$

로 주어짐을 보이고 \hbar 가 0으로 가는 극한에서 고전적 결과가 됨을 보여라.

(b) [20점] 밀도 행렬의 실공간 표현의 대각선 성분 $\rho(rr)$ 을

$$\rho(rr) = e^{-\beta U_e(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고, 페르미온에 대한 U_e 를 구한후 그 형태를 대략적으로 그려라.

4. [40점] 빛알 (photon)은 화학 에너지가 $\mu = 0$ 인 스핀 1의 보존 입자로 생각할 수 있다. 단, $s_z \in \{1, -1\}$ 의 두 상태만 가능함.(수치 연산은, 계산기는 사용하지 말고, 대략적으로 계산할 것).

(a) [10점] $|\vec{k}, s_z\rangle$ 의 상태를 점유한 평균 빛알의 수 $\langle n_{\vec{k}, s_z} \rangle$ 가

$$\langle n_{\vec{k}, s_z} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar c |\vec{k}|} - 1}$$

임을 이용하여, 온도 T 인 흑체 복사의 단위 부피당 에너지 $u(T)$ 가

$$u(T) = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} T^4$$

임을 보여라. (필요한 경우, $\int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ 임을 이용하라.)

(b) [10점] 온도 T 인 흑체가 단위 시간, 단위 면적당 방출하는 에너지 $R(T)$ 가

$$R(T) = \frac{\pi^2 T^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

로 주어짐을 보이고 반지름 $R_S = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$, 온도 $T \approx 5500^\circ \text{ K}$ 인 태양이 1초당 방출하는 에너지가 몇 eV인지 대략적으로 계산하라. (필요하면 $\hbar c \approx 2000 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$, $11000^\circ \text{ K} \approx 1 \text{ eV}$ 임을 이용할 것.)

(c) [20점] 지구 반경은 약 $6.4 \times 10^8 \text{ cm}$ 이고 지구 태양간 평균 거리는 약 $1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ 이다. 태양에서 지구로 오는 복사 에너지를 모두 흡수하여, 지구의 흑체 복사 에너지로 방출한다고 가정하자. 지구의 위도에 상관없이 지구의 표면 온도가 균일하다고 가정하고, 평형상태에 있을 때, 지구 온도를 구하라.