

열 및 통계 물리 1 (기말 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2003. 12. 18. 목요일 14:00 - 15:30

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

- N 차원 구의 부피 $V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{2^N N!} R^N$
- Boltzman 상수 $k_B = 1$

1. [40점] Joule 기관은 다음과 같이 두 개의 단열 과정과 두 개의 등압 과정으로 이루어진 진다. 여기서 열(heat)은 기관이 받는 열이다. 즉 $Q > 0$ 이면 기관으로 열이 들어오는 것이고 $Q < 0$ 이면 열이 밖으로 나가는 것이다. 등압 비열 및 등적 비열이 일정하여 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ 가 상수인 이상기체가 기관속에 있다고 가정하고 물음에 답하라.

	process	initial state	final state	heat
12	단열 압축	(V_1, p_1)	(V_2, p_2)	0
23	등압 팽창	(V_2, p_2)	(V_3, p_2)	Q_{23}
34	단열 팽창	(V_3, p_2)	(V_4, p_1)	0
41	등압 압축	(V_4, p_1)	(V_1, p_1)	Q_{41}

- (a) [10점] 위 기관의 사이클을 p - V 그래프로 나타내고 이 기관이 사이클 당 한 순수 일 W 를 그래프에 빗금(hatching)으로 표시하여라.
- (b) [5점] 23과정 및 41과정에서 계가 한 일 W_{23} 과 W_{41} 을 P_i 및 V_i 의 함수로 나타내어라. (외부에서 기관에 일을 해준 경우, 계가 $W < 0$ 의 일을 한 것으로 생각할 수 있음).
- (c) [5점] 12과정 및 34과정에서 계가 한 일 W_{12} 과 W_{34} 를 C_V 및 T_i 의 함수로 나타내어라.
- (d) [5점] 이상기체의 상태 방정식을 이용하여, 한 순환시 한 일 $W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$ 를 C_p 및 T_i 의 함수로 나타내어라.
- (e) [5점] $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$ 임을 보여라.
- (f) [10점] 열 기관 효율 η 의 정의를 적고

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

임을 보여라.

2. [30점] N 개의 단원자로 이루어진 이상기체의 Hamiltonian, H 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{p_{i,\alpha}^2}{2m}$$

여기서 m 은 입자의 질량이고, $p_{i,\alpha}$ 는 $i(i=1, \dots, N)$ 번째 입자의 운동량의 $\alpha(\alpha=x, y, z)$ 성분을 나타낸다. 이 이상기체가 부피 V 인 상자속에 들어있고 고전 역학으로 기술될 수 있는 경우를 생각한다.

(a) [15점] 상자가 열적으로 고립되어 있어, 이 계가 가지고 있는 에너지가 보존된다. 이 계의 에너지가 $(E, E+\Delta E)$ 로 주어지고 입자들을 서로 구별할 수 없을때, 엔트로피 S 가

$$S(N, V, E) = \frac{5}{2}N - N \ln N + N \ln(V/\lambda^3) \quad (1)$$

의 형태로 적을 수 있음을 보이고 λ 를 E 와 N 의 함수로 표시하라.

(b) [5점] 작은 바른틀 앙상블의 온도 정의를 적고 이를 이용하여

$$E = \frac{3}{2}NT$$

임을 보이고 λ 를 T 의 함수로 표시하라.

(c) [10점] 입자들을 서로 구별할 수 있을 때, 식 (1)로 주어지는 엔트로피가 어떻게 변하는지 기술하라.

3. [30점] 지상에 수직으로 놓여진 실린더에 단원자 이상기체가 들어있다. 무시될 정도로 작은 무게를 갖는 플라스틱 피스톤으로 실린더 위쪽이 막혀있다. 피스톤은 실린더 안쪽 면을 따라 움직일 수 있다. 초기에 실린더 내부의 압력은 대기압 p_a 와 평형상태를 이루고 있고 이때, 부피는 V_0 , 온도는 T_0 이다. 이 상태에서 피스톤위에 질량 M 인 돌을 올려 놓았다. 피스톤이 내려가 새로운 평형상태에 도달했을 때의 부피 V 를 다음 과정으로 구하라. 모든 과정은 열적으로 단열된 상태에서 이루어진다.

(a) [10점] 새로운 평형 상태에 도달했을 때의 내부 기체의 압력 P 는 $PA = P_a A + Mg$ 를 만족한다. 이상기체 상태 방정식을 이용하여, 부피 V 는

$$V = \frac{NT}{p_a + \frac{Mg}{A}}$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 T 는 새로운 평형상태의 온도이다.

(b) [10점] 중력이 이 계에 한 일을 구하고 이를 이용하여 새로운 평형상태의 온도가

$$T = \frac{3}{5}T_0 + \frac{2(P_a + Mg/A)V_0}{5N}$$

로 주어짐을 보여라.

(c) [10점] 돌에 의한 압력증가 Mg/A 를 aP_a 이라고 할 때, 나중 부피 V 가

$$V = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5(1+a)} \right) V_0$$

로 주어짐을 보여라.