열 및 통계 물리 1 (중간 고사)

출제교수명: 정형채 　　　　　　　　　　 시행일자: 2003. 10. 23. 목요일 14:00 – 15:30

자연과학 대학 　　　 학과 　　 학년, 　 학번: 　　　　　　 성명:

1. [20점] 원점에 서있는 K군이 동전을 던져 앞 면이 나오면 +방향으로 뒷 면이 나오면 −방향으로 한 번에 보폭 a만큼 움직이는 일차원 random walk을 한다.

(a) 동전을 N번 던질 때, 앞 면의 수 n_1은 이항분포를 따른다 $[n_1 \sim B\left(N, \frac{1}{2}\right)]$. 동전을 4 번 던졌을 때 앞 면이 한 번 나올 확률을 구하여라.

(b) N번 던저 앞 면이 n_1번 나왔을 때, K군의 위치를 $x = la$로 표시할 때, l을 N, n_1의 함수로 구하여라

(c) 동전을 4번 던졌을 때, K군이 $x = -2a$에 있을 확률을 구하여라

(d) K군이 동전을 10000번 던질 때 RMS 변위, $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ 를 구하여라.

2. [30점] 스핀 1/2, 자기 모멘트가 μ인 입자 N개가 외부 자기장 $\vec{B} = B\,\hat{z}$ 영향하에 있다. 스핀끼리의 상호작용은 무시할 수 있어, 해밀토니안이

$$H = -\mu B \sum_{\alpha=1}^{N} s_\alpha^z \tag{1}$$

로 주어진다. 여기서 $s_\alpha^z \in \{-1, +1\}$이다.

(a) 자기장 방향의 자기 모멘트를 갖는 입자 수가 n_1이라 할 때, 계의 에너지가

$$E = N\mu B - 2n_1\mu B \tag{2}$$

로 주어짐을 보여라.

(b) 계의 에너지가 $[E, E+dE]$ 구간에 있는 총 상태수 $\Omega(E)$가

$$\Omega(E) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu B}\right)!\left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu B}\right)!}\left(\frac{dE}{2\mu B}\right) \tag{3}$$

로 주어짐을 보여라.

(c) 계의 엔트로피 $S(E)$는 $S(E) = \ln \Omega(E)$에 의해 주어진다. $\ln N! \approx N \ln N - N$를 이용하여 식(1)로 주어지는 계의 엔트로피가

$$\begin{aligned} S(E) \approx\ & N \ln N - \frac{N}{2} \ln\left(\frac{N^2 - (E/\mu B)^2}{4}\right) \\ &+ \frac{E}{2\mu B} \ln\left(\frac{N - (E/\mu B)}{N + (E/\mu B)}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

임을 보여라.

3. [25점] 일차원 조화 진동자의 Hamiltonian은

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

로 주어진다. 이 계의 에너지가 E보다 작은 계의 고전적 상태수

$$\Omega = \frac{1}{h}\int_{H(x,p)<E} dx dp$$

를 구하고 양자 역학적 예측과 거의 일치함을 보여라.

4. [25점] 세 부분계 A, B, C로 이루어진 결합계 T가 있다. 각 부분계의 자유도는 각각 $f_A = 2$, $f_B = 4$, $f_C = 6$이다. 결합계의 총에너지가 $E_T = 4$이고 각각의 부분계는 자연수의 에너지를 가질 수 있다. 각각의 부분계의 상태수가 $\Omega_k \sim E_k^{f_k/2}$의 형태를 가질 때 ($k \in \{A, B, C\}$), 결합계의 모든 에너지 분포에 대한 상태수를 구하고 가장 가능한 에너지 분포 및 그 확률을 구하라.