열 및 통계 물리 2 (기말 고사)

출제교수명: 정형채 시행일자: 2003. 06. 16. 월요일 16:00 – 17:40

자연과학 대학 학과 학년, 학번: 성명:

1.[40점] N개의 단원자로 이루어진 이상기체의 Hamiltonian, H는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{p_{i,\alpha}^2}{2m}. \tag{1}$$

여기서 m은 입자의 질량이고, $p_{i,\alpha}$는 $i(i=1,\ldots,N)$번째 입자의 운동량의 $\alpha(\alpha=x,y,z)$성분을 나타낸다. 이 이상기체가 부피 V인 상자속에 들어있다.

(a) 상자가 열적으로 고립되어 있어, 이 계가 가지고 있는 에너지가 보존된다. 이 계의 에너지가 $(E, E+\delta E)$로 주어질 때, 상태 수 $\Omega(E,V,N)$가

$$\Omega(E,V,N) = \frac{V^N}{h^{3N}\,N!}\frac{(2\pi mE)^{3N/2}}{(\frac{3N}{2}-1)!}\frac{\delta E}{E} \tag{2}$$

로 주어짐을 보이라 여기서 $\lambda = h/\sqrt{4\pi mE/3N}$이다. 필요하면, 우측 하단에 주어진 반지름 R인 f차원의 구의 부피, $V_f(R)$을 이용하라. $T^{-1} := \frac{\partial \ln\Omega}{\partial E}$로부터 $E = \frac{3}{2}NT$임을 보여라.

(b) 상자속의 이상기체가 절대온도 T인 저장실(reservoir)과 열적 평형상태를 이룰 때, 분배함수(partition function) Z_N이

$$Z(T,V,N) = (V/\lambda^3)^N/N!$$

임을 보여라. 여기서 $\lambda = h/\sqrt{2\pi mT}$이다. 또, 이를 이용하여 평균에너지 $E(N,V,T)$를 구하여라.

(c) 상자 밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 상자 속의 입자수의 평균은 화학 포텐셜에 의해 조정된다. 화학 포텐셜 μ, 온도 T를 갖는 저장실과 평형상태를 이루고 있는 부피 V를 가진 계의 경우 대 분배함수 Z_G가

$$Z_G = \exp\left(e^{\beta\mu}V/\lambda^3\right)$$

임을 보이고 입자 수 평균 N과 평균에너지 E 를 구하여라.

(d) 해밀토니안이 식 (1)로 주어지는 경우, 계의 가능한 에너지 상태는

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\sum_{i=1}^{3N}n_i^2 = E_0\sum_{i=1}^{3N}n_i^2$$

로 주어진다. 여기서 E_0는 $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ 이다. $\sum n_i^2 < n^2$를 만족하는 상태수는 $n_i \geq 0$를 만족하면서 반지름 n인 $3N$차원 구 안에 있는 격자점의 갯수를 $N!$로 나눈 수와 같으므로 n이 큰 경우 대략적으로 $\frac{1}{N!}\frac{1}{2^{3N}}V_{3N}(n)$으로 주어진다. 이를 이용하여 에너지가 E와 $E+\delta E$사이에 있는 계의 상태수를 $E \gg E_0$인 경우 구하라.

2. [30점] 보즈 이상기체의 고유상태는 $|\vec{k}, s_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|s_z\rangle$로 주어진다. 보즈 입자는 정수 스핀을 가지며, 이상기체의 경우, $|\vec{k}, s_z\rangle$ 상태의 에너지는 (s_z상태에 무관하게) $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2k^2\,/\,2m$로 주어진다.

(a) $|\vec{k}, s_z\rangle$ 상태의 평균 입자수 $n_{\vec{k},s_z}$가

$$n_{\vec{k},s_z} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{k}}-\mu)}-1} \tag{3}$$

로 주어짐을 보여라.

(b) 계 전체의 평균 입자수 N은 각 상태에 있는 평균입자수의 합으로 주어진다. 즉,

$$N = \sum_{\vec{k},s_z} n_{\vec{k},s_z} \tag{4}$$

이다. 식 (??)와 (??)를 이용하여, 스핀 1인 보즈 입자인 경우,

$$N = \frac{3V}{\lambda^3}g_{3/2}(z) + N_0(z)$$

의 형태로 적을 수 있음을 유도하고, $g_{3/2}(z)$와 $N_0(z)$를 구하라. 여기서 $z = e^{\beta\mu}$임.

(c) 입자의 평균밀도 $n = N/V$가 고정되어있는 경우, 온도가 감소하면, 바닥상태에 있는 입자수 N_0가 전체 입자 수 N에 비례하여, N_0/N이 열역학적 극한 ($N \to \infty$)에서도 유한함을 보이고, 유한한 값을 보이기 시작하는 온도 T_c를 구하라.

3. [30점]

(a) 2차원 자유 전자 ($s = \frac{\hbar}{2}$)의 페르미 에너지를 구하라.

(b) 2차원 자유 전자의 $T = 0$에서의 평균 에너지를 구하라.

(c) 2차원 자유 전자의 비열을 대략적으로 예측하고, 계산하는 방법을 기술하라.

필요시 다음을 이용할 것

- 반지름 R인 f차원 구의 부피

$$V_f(R) = \frac{\pi^{N/2}}{(\frac{N}{2})!}R^N$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}$$