

열 및 통계 물리 2 (중간 고사)

출제교수명: 정형채

시행일자: 2003. 04. 24. 목요일 16:00 - 17:40

자연과학 대학

학과

학년,

학번:

성명:

1. [40점] 구분 불가능한 N 개의 단원자로 이루어진 기체가 조화 진동자 포텐셜 안에 있다. 이 경우 Hamiltonian, H 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_{\alpha,i}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_{\alpha,i}^2 \right). \quad (1)$$

여기서 $r_{\alpha,i}$ 와 $p_{\alpha,i}$ 는 α ($\alpha = 1, \dots, N$)번째 입자의 좌표와 운동량의 i ($i = x, y, z$)성분을 각각 나타내고 m 은 입자의 질량이고 $m\omega^2$ 는 조화 진동자 용수철 상수이다.

- (a) [10점] 절대온도 T 인 저장실(reservoir)과 열적 평형 상태를 이룰 때, 고전적 분배함수(partition function)가 $Z(T, \omega, N)$ 이

$$Z(T, \omega, N) = \frac{1}{N!} \left[\frac{T}{\hbar\omega} \right]^{3N} \quad (2)$$

로 주어짐을 보여라.

- (b) [10점] Helmholtz 자유에너지는 $F = -T \log Z$ 로 주어진다. 화학 포텐셜(chemical potential) $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ 가

$$\mu = T \left[\log N - 3 \log \frac{T}{\hbar\omega} \right] \quad (3)$$

로 주어짐을 보여라.

- (c) [10점] Potential밖의 저장실과 입자를 교환할 때, 계의 입자 수 평균은 저장실의 화학 포텐셜에 의해 조정되고, 대분배함수 $Z_G = \sum_N \zeta^N Z(T, \omega, N)$ 을 고려하여 구할 수 있다. 여기서 $\zeta = e^{\beta\mu}$ 임. 화학 포텐셜 μ , 온도 T 를 갖는 저장실과 평형상태를 이루고 있을 때 대분배 함수 Z_G 와 평균 입자수 $\langle N \rangle$ 를 구하라. 이로부터 μ 를 $\langle N \rangle, \omega, T$ 의 함수로 표시하면, (b)와 같은 결과가 됨을 보여라.

- (d) [10점] f -차원의 조화 진동자의 가능한 에너지 값을 양자 역학적으로 계산하면 $|n_1, \dots, n_f\rangle$ 상태의 에너지는

$$E(n_1, \dots, n_f) = \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(n_f + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar\omega$$

로 주어진다. $f = 3N$ 인 경우 분배 함수를 계산하고 어떤 극한에서 식 (2)의 고전 분배 함수가 되는지 밝혀라.

2. [30점] 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자 하나씩으로 이루어진 A계와 B계가 couple되어 A+B계를 이루고 있다. 어떤 순간에 A+B계는 state ket

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |\uparrow_A\rangle (|\uparrow_B\rangle + \sqrt{3} |\downarrow_B\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}} |\downarrow_A\rangle (\sqrt{3} |\uparrow_B\rangle + |\downarrow_B\rangle)$$

로 기술되는 pure 상태에 있다. 여기서 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 은 z -방향의 스핀 up, down 상태를 각각 나타낸다.

- (a) [10점] A+B계의 현재 상태를 나타내는 밀도 상태 ρ_{AB} 를 구하라.
 (b) [10점] $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ 와 $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB})$ 를 구하라.
 (c) [10점] 스핀 A의 z 성분 S_A^z 의 기대값을 구하라.

3. [30점] 어떤 물체가 표면에 주어진 원자에 흡착할 수 있는 살창자리의 수가 N 개라 하자. 이러한 살창자리에 흡착된 원자는 흡착 안된 원자보다 에너지가 ϵ 만큼 감소한다. 흡착된 원자의 수 N_a 와 흡착된 원자들의 화학 퍼텐셜 μ 사이의 관계식을 구하라.